

В.А.АБЧУК, В.Г.СУЗДАЛЬ

ПОИСК ОБЪЕКТОВ

В. А. АБЧУК
В. Г. СУЗДАЛЬ

ПОИСК ОБЪЕКТОВ



МОСКВА «СОВЕТСКОЕ РАДИО» 1977

УДК 621.396.96

Абчук В. А., Суздалъ В. Г. Поиск объектов. М. «Сов. радио», 1977, 386 с.

Поиск кораблей и судов в море, поиск разнообразных объектов на суше, в воде и воздухе, поиск рыбы и морского зверя — таков далеко не полный перечень поисковых задач, с которыми приходится сталкиваться в процессе научной и практической работы.

Решение задач поиска объектов, подчас весьма сложных и специфических, требует создания необходимого научного аппарата, выработки специальной теории.

В послевоенные годы появился ряд отечественных и зарубежных работ, посвященных отдельным проблемам поиска. Однако до настоящего времени нет работы, рассматривающей проблему поиска объектов в целом, с единых позиций.

В предлагаемой книге достаточно полно и систематически изложены основные вопросы теории поиска объектов и научно обоснованы необходимые практические рекомендации.

Анализ основных закономерностей процесса поиска объектов основан на применении к поисковым задачам аппарата математического анализа, теории вероятностей, математического программирования, теории игр и т. д.

Книга предназначена для широкого круга читателей, деятельность которых связана с вопросами поиска объектов.

103 рис., 47 табл., библи. 29 назв.

Редакция кибернетической литературы

А $\frac{30501-021}{046(01)-77}$ 52-77

С Издательство «Советское радио», 1977 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы поиска, всегда представлявшего одну из важнейших сторон человеческой деятельности, в последнее время привлекают внимание все большего круга ученых и практиков.

Поиск в широком смысле слова — это и разведка полезных ископаемых, и отыскание неисправностей в сложной аппаратуре, и поиск оптимальных управленческих решений, и научные изыскания и, наконец, поиск различных объектов в различных средах.

Все виды этой весьма разнообразной деятельности объединены общим свойством — конечной целью их является получение определенной информации, а сам процесс ее получения называют поиском.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная различным видам поиска, однако поиск реальных объектов освещен в научной литературе недостаточно полно. В прямой постановке изложение теории поиска объектов почти не встречается. Список источников по этому вопросу очень ограничен [2, 9, 15, 26].

Между тем поиск реальных объектов представляет собой важную и весьма нелегкую задачу, решением которой приходится заниматься представителям самых разных профессий.

Учитывая принципиальные различия, существующие между поиском реальных объектов и другими видами поиска, а также важность этой проблемы, представляется целесообразным рассматривать теорию поиска объектов в качестве самостоятельной научной дисциплины, которой и посвящена настоящая книга.

Основной целью теории поиска является разработка и обоснование целесообразных способов обнаружения разнообразных объектов. Средством достижения этой цели служит решение ряда исследовательских задач, главными из которых являются:

— установление причинно-следственных связей между условиями выполнения поиска и его результатами путем построения и анализа соответствующих математических моделей;

— анализ физических основ поиска, включающий рассмотрение объектов поиска, средств обнаружения и среды поиска;

— установление кинематических закономерностей взаимных перемещений наблюдателя, ведущего поиск, и объекта поиска, приводящих к их сближению на дальность действия средств обнаружения;

— обоснование оптимальных способов поиска и слежения, обеспечивающих максимизацию или минимизацию избранных критериев эффективности;

— обоснование оптимального распределения поисковых ресурсов.

Решение перечисленных задач требует выделения и обобщения в зависимости от рассматриваемой проблемы поиска объектов, научных методов и результатов таких, казалось бы, разнородных и далеких дисциплин, как теория средств обнаружения (радиолокация, гидроакустика и др.), теория физических полей различных объектов, теория маневрирования, исследование операций (теория выработки оптимальных решений) и др. Основные положения этих дисциплин наряду с использованием выводов основных отечественных и зарубежных публикаций, посвященных непосредственно теории поиска, дают возможность подойти к решению поставленных задач.

При этом широкое применение находит аппарат теории вероятностей, в первую очередь, ее хорошо развитая ветвь — теория марковских процессов, а также разнообразные методы исследования операций.

Поиск объектов можно представить как разворачивающийся во времени процесс, последовательность действий в котором может приводить к различным результатам. Задачей теории поиска объектов при этом является выработка наилучшего плана поиска, обеспечивающего из многих возможных такой способ действий, который приводит к обнаружению объекта в кратчайшее или заданное время при минимальных затратах усилий.

Выработанная последовательность действий марковских сил, соответствующая оптимальному плану, состав-

дана алгоритм поиска. Создание таких алгоритмов применительно к решению разнообразных поисковых задач представляет основной результат применения теории поиска и подробно описано в данной книге.

Структура книги соответствует основному содержанию предмета теории поиска (§ 1.1). Приведенные в книге числовые характеристики и параметры объектов поиска, средств обнаружения и их носителей взяты из открытых зарубежных материалов, опубликованных в печати. В ряде случаев они относятся к гипотетическим условиям и служат главным образом для иллюстрации теоретических вопросов, все числовые примеры, приведенные для иллюстрации, являются гипотетическими.

Введение, § 1.1 и 1.3, гл. 2-4, а также приложение (табл. 1—6) написаны проф. докт. военно-морских наук В. А. Абдуком, § 1.2, 1.4 и 1.5, гл. 5—7 и табл. 7 приложения написаны проф. докт. военно-морских наук В. Г. Суздацем.

Авторы выражают признательность Г. Н. Любину, В. Е. Зуссеру и А. Я. Кирите за ценные замечания, сделанные при подготовке рукописи книги к изданию.

Глава I

ОБЩИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

Предметом изучения теории поиска является поиск реальных объектов в различных средах.

Поиском можно назвать процесс целенаправленного обследования определенной области пространства для обнаружения находящегося там объекта. Под обнаружением понимается получение информации о месте объекта путем установления с ним прямого энергетического контакта. Обнаружение осуществляется с помощью средств обнаружения — оптических, радиолокационных, гидроакустических и других приборов.

Одним из путей исследования процесса поиска является построение и анализ математических моделей, отображающих объективные закономерности поиска и позволяющих установить причинно-следственные связи между условиями выполнения поиска и его результатами. В процессе поиска участвуют две стороны: объект поиска и наблюдатель, который может быть как одиночным, так и групповым.

Объектом поиска являются различные предметы, расположенные в разных средах, например: летательные аппараты, разнообразные предметы на поверхности Земли, корабли и суда, промысловая рыба и морские животные и т. д.

Объект поиска обладает двумя характерными особенностями: 1) свойства его отличаются от свойств среды, в которой осуществляется поиск; 2) информация о месте объекта до начала поиска и в процессе его выполнения носит, как правило, неопределенный характер. Этой неопределенностью и вызваны поисковые действия, суть которых состоит в получении информации о месте

объекта. Контрастность объекта поиска на фоне среды создает возможность его обнаружения.

Объекты поиска могут характеризоваться как наличием излучения (электромагнитного, акустического и т. д.), так и его отсутствием. В связи с этим работа средств обнаружения основывается либо на фиксировании сигнала, отраженного от объекта поиска, либо на приеме собственного излучения объекта. Процесс поиска в значительной степени зависит от свойств объекта обнаружения, а также от параметров технических средств обнаружения и особенностей окружающей среды. Все эти вопросы составляют физическую основу теории поиска.

В процессе поиска применение средств обнаружения сочетается с активным маневром носителя этих средств — наблюдателя. В связи с этим особое значение приобретает изучение закономерностей взаимного перемещения наблюдателя и объекта поиска. Эти закономерности составляют неотъемлемую часть теории поиска объектов — кинематику поиска.

Важное место в теории поиска объектов занимает обоснование и методы расчета показателей успешности выполнения поиска — критериев его эффективности.

Конечной целью теории поиска является выбор оптимальных способов выполнения поисковых действий применительно к конкретной обстановке и условиям проведения поиска — так называемой поисковой ситуации. Выбор оптимального способа поиска основан на анализе математической модели соответствующей поисковой ситуации и сводится к установлению управляющих параметров поиска, обеспечивающих решение поисковой задачи в кратчайшее или заданное время при минимальных затратах поисковых усилий.

Наряду с собственно поиском в теории поиска объектов рассматривается и его особая разновидность — слежение. Слежение — это процесс постоянного наблюдения за обнаруженным объектом, цель которого состоит в поддержании контакта «наблюдатель — объект» и его восстановлении в случае потери. В теории поиска на основе анализа соответствующих математических моделей обосновываются оптимальные способы слежения.

Поскольку выделенные для ведения поиска ресурсы (наблюдатели с их маневренными качествами, средствами обнаружения и т. п.), как правило, ограничены,

возникает задача разработки оптимального плана распределения поисковых ресурсов. Для решения этой задачи привлекается аппарат математического программирования, теории игр и т. п.

Все многообразие видов и способов поиска объектов удобно подразделить следующим образом. В зависимости от поставленной задачи различают собственно поиск и слежение за обнаруженным объектом поиска. Исходя из поисковой ситуации рассматривают поиск на площади (в заданном районе), поиск на линии (на рубеже) и поиск по данным первичного обнаружения («по вызову»). В зависимости от соотношения дальностей взаимного обнаружения объекта поиска и наблюдателя поиск может быть с опережением наблюдателя объектом поиска и без опережения.

По характеру просмотра участков района поиска различают поиск закономерный и случайный. По периодичности просмотра наблюдателем среды поиска поиск объектов может быть непрерывным или дискретным. В зависимости от возможности достижения конечного результата поиска — обнаружения объекта поиск бывает достоверным и недостоверным. По характеру расположения объектов поиска различают поиск воздушных, наземных, морских и других объектов, по характеру поисковых средств наблюдателя — авиационный, корабельный, с помощью спутников и т. д. В зависимости от применяющихся средств обнаружения поиск может быть визуальным, радиолокационным, гидроакустическим и т. д.

1.2. ЗАКОНОМЕРНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

Закономерности поиска объектов. В зависимости от характера причинно-следственных связей между условиями поиска и его результатами закономерности процесса поиска можно подразделить на регулярные, вероятностные и конфликтные.

Регулярные закономерности выражают такую форму причинно-следственных связей, при которой результаты поиска определяются однозначно. Примерами проявления регулярных закономерностей являются задачи сближения наблюдателя с объектом поиска, рассмотренные

в § 3.2. Результат решения этих задач при отсутствии ошибок в определении места и элементов движения объекта поиска всегда однозначен. Если же место и элементы движения объекта поиска определяются со случайными ошибками, результат поиска теряет однозначность и становится случайным, а закономерности поиска приобретают вероятностный характер. Такой поиск рассматривается в § 3.3.

Как регулярные, так и вероятностные закономерности обуславливаются объективными обстоятельствами выполнения поиска, не связанными с противодействием объекта, стремящегося избежать обнаружения. Во многих военных задачах, а также в «мирных» задачах поиска живых объектов появляется необходимость учитывать такие противодействия. Это не может не сказаться на результатах поиска. Возникает особая ситуация, закономерности которой носят конфликтный характер. Анализ подобного рода закономерностей посвящен § 1.5.

Математические модели поиска объектов. Регулярные, вероятностные и конфликтные закономерности поиска объектов чрезвычайно сложны. Для выявления лежащих в их основе количественных соотношений прибегают к математическому описанию интересующего нас процесса, которое принято называть математической моделью поиска.

Построение математической модели требует выделения всех наиболее существенных факторов и условий, определяющих как состояние и развитие процесса поиска, так и возможное управление этим процессом. Эти факторы и условия являются переменными и называются элементами модели. Те переменные, которые можно изменять, называются управляемыми, те же, которые нельзя изменить, — неуправляемыми. В зависимости от сущности поискового процесса его математическая модель может содержать только неуправляемые переменные или же управляемые и неуправляемые. Математические модели первого рода называются описательными, модели второго рода — нормативными.

В описательной модели нет ни наблюдателя, принимающего решение о поиске, ни объекта поиска, принимающего решение об уклонении. Типичным примером описательной модели является представление поиска в виде случайного процесса марковского типа (§ 1.3).

Для нормативной модели характерно наличие хотя бы одной из сторон, принимающей решение (наблюдателя или объекта поиска). Такие модели в зависимости от объема информации о поисковой ситуации и закономерностей, лежащих в ее основе, можно отнести к одному из следующих уровней: детерминированному, стохастическому и неопределенному.

На детерминированном уровне нормативная модель строится тогда, когда исход поисковой ситуации подчинен регулярным закономерностям и факторы, влияющие на этот исход, поддаются достаточно точному измерению или оценке, а случайные факторы либо отсутствуют, либо ими можно пренебречь. В этом случае довольно трудно собрать и обработать данные. Исключение составляют простые ситуации, полностью характеризующие условия поиска. Кроме того, возникают сугубо математические трудности при построении и анализе такой модели. Задача выбора оптимального способа поиска в условиях нормативной модели детерминированного уровня сводится к максимизации или минимизации критерия эффективности. Для решения этой задачи наряду с вариационными методами (поиск экстремума) широко используются методы математического программирования (линейного, нелинейного, динамического).

На стохастическом уровне нормативная модель в соответствии с вероятностными закономерностями представляется как некоторый случайный процесс, ход и исход которого описываются теми или иными характеристиками случайных величин (математическими ожиданиями, дисперсиями, функциями распределения и т. п.). Построение модели на этом уровне возможно, если имеется достаточный фактический материал для оценки необходимых вероятностных распределений или же теория рассматриваемого явления позволяет определить эти распределения теоретически (на основе формул теории вероятностей, предельных теорем и т. п.). При построении модели на стохастическом уровне наравне с классическим аппаратом теории вероятностей широко применяется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), а в качестве основного принципа оптимальности принимается экстремизация математического ожидания критерия эффективности. Тем самым задача практически переводится на детерминированный уровень и основным математическим аппаратом выбора опти-

мального способа поиска оказываются методы оптимизации без ограничений или при наличии их (дифференциальное и вариационное исчисление, а также математическое программирование).

Неопределенный уровень характеризуется таким объемом информации, при котором известно лишь множество возможных вариантов поисковой ситуации, но без какой-либо априорной информации о вероятности появления каждого из них. Обычно такой объем информации характерен для конфликтной ситуации, в которой объект поиска и наблюдатель преследуют прямо противоположные цели, выбирая для их достижения тот или иной способ действия.

Построение модели и выбор оптимального способа на неопределенном уровне встречает не только аналитические и вычислительные, но и концептуальные трудности, так как сами принципы оптимальности в этом случае могут быть не совсем ясны. Установление таких принципов оптимальности, нахождение решений таких задач составляют содержание теории игр. Поэтому при построении модели на неопределенном уровне используется математический аппарат теории игр.

Нормативную модель, построенную на детерминированном или стохастическом уровне, называют экстремальной, а модель, построенную на неопределенном уровне, — теоретико-игровой. В самом общем виде как экстремальная, так и теоретико-игровая модель задаются множеством величин, с каждой из которых связано определенное число — значение принятого критерия эффективности. Обычно в этом случае говорят, что на множестве определена функция, а само множество называют ее областью определения.

В экстремальных моделях (объект поиска имеет заданный способ действия) этот критерий определяет целевую функцию, а в теоретико-игровых (объект поиска имеет заданное множество возможных способов действия) — функцию выигрыша.

После построения нормативной модели ее используют для определения оптимальных алгоритмов поиска.

Приведенная классификация математических моделей поиска в определенной мере условная и неполная. Тем не менее, она позволяет более содержательно раскрыть проблему моделирования процесса поиска объектов.

Представление поиска как случайного процесса марковского типа. Поиск следует рассматривать как случайный процесс, ход и исход которого зависят от ряда случайных факторов. Поэтому исход поиска для каждого отдельного случая предсказать невозможно. Вместе с тем можно сделать вполне обоснованное предположение о среднеожидаемом результате поисковых действий. Основанием для этого служит статистическое проявление закономерностей случайных явлений. На практике, конечно, трудно предположить, что комплекс однородных условий поиска будет осуществляться многократно. Тем не менее способы поиска, основанные на максимальной вероятности обнаружения, оправданы и в тех случаях, когда нельзя ожидать подлинной массовости опытов при однородных условиях.

Для количественного описания процесса поиска применяется специальный аппарат теории вероятностей. Рассматривается система наблюдателей и объектов поиска. Процесс поиска при этом сводится к переходу системы из одного состояния в другое. Поиск представляется как случайный процесс марковского¹ типа. Процесс марковского типа (или просто марковский) — это такой процесс, в котором будущее состояние системы определяется ее настоящим состоянием и не зависит от ее состояния в прошлом. Применительно к проблеме поиска это определение можно сформулировать так: если система «наблюдатели — объекты поиска» в данный момент времени t находится в состоянии A , то вероятность любого состояния системы в будущем (в $t + \Delta t$) зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Реальные процессы поиска могут быть и немарковскими, т. е. такими, в которых вероятности обнаружения зависят и от предшествующего развития системы. Однако сложность анализа таких процессов, с одной стороны, и неполнота информации о них — с другой, вынуждают сделать допущение об их марковости, т. е. пренебречь зависимостью вероятности обнаружения от «предыстории» процесса.

¹ В честь выдающегося русского математика А. А. Маркова (1856—1922).

В большинстве моделей поиска переход системы из одного состояния в другое может осуществляться в любые моменты времени, что дает основание считать поиск процессом с непрерывным временем.

Поскольку все возможные состояния системы наблюдатели — объекты поиска можно перечислить, а переход системы из одного состояния в другое (от необнаружения к обнаружению) осуществляется скачком, поиск можно отнести к процессам с дискретными состояниями.

При рассмотрении марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями вводится понятие «поток событий». Поток событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Применительно к процессу поиска поток событий — это последовательность обнаружений объекта поиска наблюдателями. В теории поиска такой поток называют потоком обнаружений.

Поток обнаружений обладает следующими свойствами: 1) отсутствием последствия: число обнаружений, попадающих на данный отрезок времени, не зависит от того, сколько обнаружений приходится на другие, не пересекающиеся с ним отрезки; 2) ординарностью: вероятность попадания двух обнаружений на элементарный отрезок времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного обнаружения. Это свойство означает, что обнаружения объекта происходят по-одному, а не парами, тройками и т. д.

В ряде поисковых задач поток обнаружений обладает также свойством стационарности: вероятность попадания того или иного обнаружения на отрезок времени t зависит только от его величины и не зависит от места расположения отрезка на временной оси. Это свойство равнозначно однородности потока во времени.

Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствия, ординарности и стационарности, называется стационарным пуассоновским¹ (характеризующимся распределением Пуассона) или простейшим потоком.

Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствия и ординарности, но не являющийся ста-

¹ В честь известного французского математика Пуассона (1781—1840).

ционарным, называется нестационарным пуассоновским потоком.

Выведем формулу распределения Пуассона применительно к поиску. Будем определять, исходя из рассмотренных выше свойств пуассоновского поиска, вероятности P_m получения ровно заданного числа обнаружений m за время поиска t_{Π} .

Введем понятие интенсивности потока обнаружений (в терминах теории марковских случайных процессов — плотность потока событий). Интенсивность потока обнаружений (или интенсивность поиска) γ — это среднее число обнаружений в единицу времени. Для стационарного пуассоновского потока интенсивность поиска — величина постоянная:

$$\gamma = \text{const.} \quad (1.1)$$

Для нестационарного пуассоновского потока интенсивность поиска — величина переменная, зависящая от времени:

$$\gamma = \gamma(t). \quad (1.2)$$

Разобьем время поиска t_{Π} на n равных элементарных участков $\Delta t = t_{\Pi}/n$. Математическое ожидание числа обнаружений, приходящихся на отрезок времени Δt , очевидно, равно $\gamma \Delta t$. В соответствии со свойством ординарности потока, вероятностью двух или более обнаружений для малого участка времени можно пренебречь. Поэтому вероятность только одного обнаружения за время Δt можно считать приближенно равной $\gamma \Delta t$ (с точностью до бесконечно малой величины высшего порядка при $\Delta t \rightarrow 0$).

Следовательно, можно считать, что вероятность хотя бы одного обнаружения за время Δt приближенно равна $P = \gamma t_{\Pi}/n$, а вероятность противоположного события (ни одного обнаружения) за время Δt приближенно равна $q = 1 - (\gamma t_{\Pi})/n$.

Поскольку в соответствии с условием отсутствия последствий число обнаружений на непересекающихся участках времени независимо, то обнаружение на n участках времени можно рассматривать как результат n независимых опытов и применить на этом основании теорему о повторении опытов. В соответствии с указанной теоремой вероятность $P_{m,n}$ того, что среди n участков времени обнаружения будут иметь место ровно

на m участках, равна соответствующему члену биномиального распределения

$$P_{m,n} = C_n^m P^m q^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\gamma t_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^{n-m}, \quad (1.3)$$

где C_n^m — сочетание из n элементов по m .

Поскольку в силу свойства ординарности потока вероятность двух обнаружений на элементарном отрезке t пренебрежимо мала, то при $n \rightarrow \infty$ вероятность $P_{m,n}$ становится приближенно равной искомой вероятности P_m получения ровно заданного числа обнаружений m за время поиска t_n , причем

$$P_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma t_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^{n-m}. \quad (1.4)$$

Выражение, стоящее под знаком предела в формуле (1.4), можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} C_n^m \left(\frac{\gamma t_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^{n-m} &= \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \frac{(\gamma t_n)^m}{n^m} \frac{\left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^n}{\left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^m} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \frac{(\gamma t_n)^m}{m!} \times \\ &\times \frac{\left[\left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right) \frac{n}{\gamma t_n} \right]^{\gamma t_n}}{\left(1 - \frac{\gamma t_n}{n} \right)^m}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При $n \rightarrow \infty$ первая дробь и знаменатель последней дроби в выражении (1.5) стремятся к единице, а числитель последней дроби к $e^{-\gamma t_n}$ (замечательный предел).

Таким образом, искомая вероятность P_m получения ровно заданного числа обнаружений m за время поиска t_n выражается формулой

$$P_m = (\gamma t_n)^m e^{-\gamma t_n} / m! \quad (1.6)$$

Здесь $\gamma t_n \rightarrow$ среднее число обнаружений за время поиска t_n . В теории поиска эту величину называют поисковым

потенциалом или потенциалом обнаружения и обозначают U . Исходя из этого, формула (1.6) приобретает вид

$$P_m = (U^m/m!) e^{-u}. \quad (1.7)$$

В тех случаях, когда интенсивность потока обнаружений с течением времени остается постоянной (стационарный пуассоновский поток), поисковый потенциал равен

$$U = \gamma t_{\Pi}. \quad (1.8)$$

В случаях, когда интенсивность потока обнаружений с течением времени меняется (нестационарный пуассоновский поток), эта величина

$$U = U(t) = \int_{t_0}^{t_0+t_{\Pi}} \gamma(t) dt, \quad (1.9)$$

где t_0 — начало отсчета времени поиска.

Поскольку во многих случаях для решения поставленной задачи поиска вполне достаточно одного обнаружения объекта, важно уметь рассчитывать вероятность хотя бы одного (не менее чем одного) обнаружения в течение времени поиска $P_{m \geq 1}$. Эту вероятность можно получить из очевидного соотношения

$$P_{m \geq 1} = 1 - P_{m=0}. \quad (1.10)$$

Величину $P_{m=0}$ находим из формулы (1.7) для $m=0$:

$$P_{m=0} = (U^0/0!) e^{-u} = e^{-u}. \quad (1.11)$$

Следовательно,

$$P_{m \geq 1} = 1 - e^{-u}. \quad (1.12)$$

Полученную вероятность хотя бы одного обнаружения объекта $P_{m \geq 1}$ в теории поиска часто называют просто вероятностью обнаружения и обозначают $P_{об}$, которая для стационарного пуассоновского потока

$$P_{об} = 1 - e^{-u} = 1 - e^{-\gamma t_{\Pi}}, \quad (1.13)$$

для нестационарного пуассоновского потока

$$P_{об} = P_{об}(t) = 1 - e^{-u(t)} = 1 - \exp \left[- \int_{t_0}^{t_0+t_{\Pi}} \gamma(t) dt \right]. \quad (1.14)$$

Распределение кинематических характеристик объектов поиска. Понятие «поиск» подразумевает, что кинематические характеристики объектов поиска (их местоположение и элементы движения в каждый данный момент времени) в общем случае неизвестны. В связи с этим все или некоторые величины, характеризующие положение и движение объекта поиска относительно наблюдателя, рассматриваются как случайные и независимые друг от друга. При этом каждая из указанных случайных величин характеризуется своим распределением.

Положение объектов поиска относительно наблюдателя и их скорости могут быть охарактеризованы плотностью вероятности данных кинематических характеристик. Так, если в качестве кинематических характеристик объекта поиска заданы такие величины, как V_0 — скорость объекта поиска, ξ — угол разности курсов наблюдателя и объекта, r — расстояние наблюдатель — объект, q_n — курсовой угол наблюдателя на объект (угол между курсом наблюдателя и направлением от него на объект), то вероятность P того, что объект будет иметь скорость, заключенную между V_0 и $V_0 + dV_0$, угол разности курсов между ξ и $\xi + d\xi$, расстояние наблюдатель — объект между r и $r + dr$ и курсовой угол между q_n и $q_n + dq_n$, как правило, можно представить в следующем виде:

$$P(V_0, \xi, r, q_n) dV_0 d\xi dr dq_n. \quad (1.15)$$

Если требуется определить вероятность кинематических характеристик в некотором диапазоне, необходимо выражение (1.15) проинтегрировать по всем переменным в заданных пределах.

Аналитическое выражение функции $P(V_0, \xi, r, q_n)$ можно найти статистическими методами при различных гипотезах о движении и положении объектов поиска в соответствии со сложившейся обстановкой. Однако для этого требуется большое количество опытных данных, получение которых в реальных условиях представляет известную трудность, поэтому для решения этой задачи часто используют теоретический путь.

Поиск, как правило, организуют, чтобы обнаружить объекты определенного класса (косяки рыбы, воздушные объекты и т. п.), скорость V_0 которых лежит в определенных пределах, вследствие чего ее считают изве-

стной. При этом наиболее часто встречаются равномерное и нормальное распределение вероятных мест объекта поиска.

Равномерное распределение вероятных мест объекта поиска. При организации поиска часто складывается такая ситуация, когда достоверно известна площадь S_p действия объекта, а место и направление его движения неизвестны. Причем ни одному возможному его курсу или местоположению нельзя отдать предпочтение. В данном случае можно принять гипотезу о равномерном распределении местоположения объекта в районе площади S_p и равномерном распределении направления его движения в пределах от 0 до 2π . При равномерном законе распределения аналитическое выражение для плотности вероятности можно найти в результате следующих рассуждений:

— так как движение возможно в любом направлении, вероятность того, что разность курсов ξ будет находиться в пределах от ξ до $\xi + d\xi$, равна $d\xi/2\pi$;

— так как нахождение объекта возможно в любой точке площади S_p , вероятность того, что он находится в элементарной площади $rdrdq_n$, будет равна $rdrdq_n/S_p$;

— события «разность курсов ξ находится в пределах от ξ до $\xi + d\xi$ » и «объект находится в пределах элементарной площади $rdrdq_n$ » считаются независимыми. Вследствие этого на основании теоремы об умножении вероятностей вероятность того, что разность курсов ξ находится в пределах от ξ до $\xi + d\xi$ и что объект находится на элементарной площади $rdrdq_n$, равна

$$P(\xi, r, q_n) d\xi dr dq_n = \frac{rdrdq_n d\xi}{2\pi S} \quad (1.16)$$

Следовательно, выражение для средней относительной плотности вероятности $P(\xi, r, q_n)$ при принятой гипотезе о движении объекта поиска и его местоположении относительно наблюдателя будет иметь следующий вид: $P(\xi, r, q_n) = r/2\pi S$.

Учитывая, что скорость объекта известна, можно найти вероятность того, что разность курсов заключена между ξ_1 и ξ_2 , расстояние — между r_1 и r_2 и курсовой угол — между q_{n1} и q_{n2} (при условии, что $\xi_2 > \xi_1$; $r_1 < r_2$; $q_{n2} > q_{n1}$):

$$P(\xi_1 \leq \xi < \xi_2; r_1 \leq r \leq r_2; q_{n1} \leq q_n < q_{n2}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi S} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{q_{H1}}^{q_{H2}} r dr dq_H d\xi. \quad (1.17)$$

Пример 1.1. Дано. В некоторой части океана площадью $S_p = 10\,000 \text{ км}^2$ функционирует подвижный объект (например, косяк рыбы), местоположение и направление движения которого неизвестны. Требуется определить вероятность нахождения этого объекта в секторе, ограниченном расстояниями $r_1 = 0$, $r_2 = 50 \text{ км}$ и курсовыми углами $q_{H1} = \pi/4$, $q_{H2} = 7\pi/4$, и что его курс заключен в пределах $\pi/2 \leq \xi < 3\pi/2$, если вектор скорости наблюдателя ориентирован на север.

Решение. По формуле (1.17) находим

$$P\left(\frac{\pi}{2} \leq \xi < \frac{3}{2}\pi; 0 \leq r \leq 50; \frac{\pi}{4} \leq q_H < \frac{7}{4}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 10000} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\xi \int_0^{50} r dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} dq_H = 0,29.$$

Нормальное распределение вероятных мест объекта поиска. Нормальное распределение вероятных мест объекта поиска соответствует случаю, когда поисковые

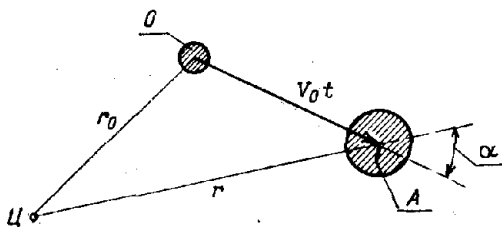


Рис. 1.1. К обоснованию распределения вероятных мест объекта поиска после его обнаружения.

действия организуются на основе данных о местоположении объекта на определенный момент времени, после которого поступление данных прекратилось. Это так называемый вторичный поиск или поиск «по вызову» (см. § 4.5).

Рассмотрим следующую поисковую задачу (рис. 1.1).

Пусть в определенный момент времени обнаружен некоторый объект. Место объекта получено с некоторой ошибкой. Центр рас-

пределения вероятных мест объекта находится в точке Ц. Одно из возможных случайных положений объекта в момент обнаружения — точка О, находящаяся от центра распределения на расстоянии r_0 . Сразу же после обнаружения объекта поиска контакт с ним был потерян. Необходимо организовать поисковые действия для второго обнаружения объекта, используя для этого данные о месте его первоначального обнаружения.

В связи с этим требуется найти закон изменения плотности вероятности нахождения объекта в различных точках окрестности его первоначального обнаружения. Предполагается, что объект уходит из места первоначального обнаружения с постоянной скоростью V_0 . При этом курсы его равномерно распределены от 0 до 360° (2π).

С приемлемой для практических расчетов точностью можно считать, что ошибки в определении места первоначального обнаружения объекта поиска подчиняются нормальному круговому закону на плоскости, плотность распределения которого $f(r_0)$ выражается формулой

$$f(r_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.18)$$

где σ — среднеквадратическая ошибка места объекта, зависящая от точности знания места наблюдателем и точности определения координат объекта относительно наблюдателя.

Через промежуток времени t после момента первоначального обнаружения объект поиска удалится от места обнаружения на расстояние $V_0 t$. Предположим, что объект при этом окажется в случайной точке А на расстоянии r от центра распределения.

Рассмотрим вначале случай, когда курс объекта поиска составляет с направлением от центра распределения на новое место объекта угол в пределах между α и $\alpha + d\alpha$. При этом объект через время t будет находиться в пределах некоторой площади dA .

Плотность вероятности события «объект находится в площади dA » является произведением плотностей вероятностей двух независимых событий:

— объект поиска имеет данный курс, составляющий с направлением ЦА угол между α и $\alpha + d\alpha$. Плотность вероятности этого события по условию задачи равна $d\alpha/2\pi$;

— объект в момент первоначального обнаружения находился в точке О на расстоянии от точки А, равном $V_0 t$, в направлении, обратном курсу объекта. Плотность вероятности этого события соответствует выражению (1.18). Подставив вместо r_0 его значение (рис. 1.1),

$$r_0^2 = r^2 + V_0^2 t^2 - 2rV_0 t \cos \alpha, \quad (1.19)$$

получим

$$f(r_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2 - 2rV_0 t \cos \alpha}{2\sigma^2}\right). \quad (1.20)$$

Следовательно, плотность вероятности события «объект находится в площади dA » равна

$$\frac{d\alpha}{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2 - 2rV_0 t \cos \alpha}{2\sigma^2}\right). \quad (1.21)$$

Для получения искомого закона распределения плотности вероятности того, что объект поиска через время t будет находиться на расстоянии r от центра распределения $f(r, t)$, проинтегрируем полученное произведение (1.21) по всем возможным значениям угла α от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} f(r, t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2 - 2rV_0 t \cos \alpha}{2\sigma^2}\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{rV_0 t \cos \alpha}{\sigma^2}\right) d\alpha. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Поскольку интеграл в формуле (1.22) через элементарные функции не выражается, выразим его через функцию Бесселя 1-го рода, значение которой может быть получено из специальных таблиц¹. Придавая показателю степени i знак минус, чтобы не изменить значения результата, одновременно умножим его на $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{i^2 rV_0 t \cos \alpha}{\sigma^2}\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{irV_0 t \cos \alpha}{\sigma^2}\right) d\alpha = I_0\left(\frac{rV_0 t}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

После подстановки (1.23) в (1.22) получим

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_0 t}{\sigma^2}\right), \quad (1.24)$$

где I_0 — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

¹ Например, Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., Физматгиз, 1955, с. 76—78.

Вид кривой, построенной в соответствии с формулой (1.24), показан на рис. 1.2. Здесь по оси абсцисс отложена величина r , выраженная для наглядности и удобства расчета в долях среднеквадратического отклонения. Кривые плотности вероятности даны для фиксированных промежутков времени t_k после первоначального обнаружения объекта. Эти промежутки определяются из отношения $t_k = K_0/V_0$, где k — любое положительное число.

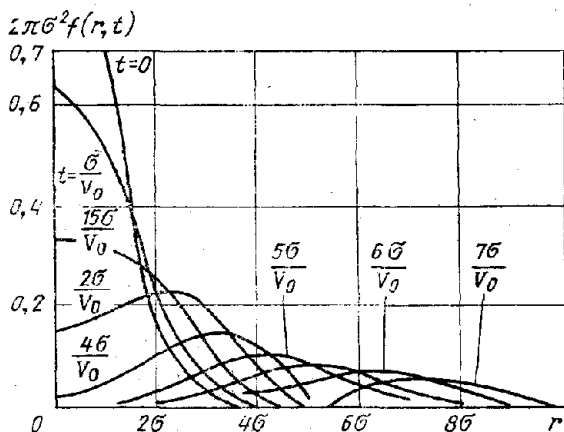


Рис. 1.2. Плотность вероятности распределения мест объекта поиска после его обнаружения.

Кривые на рис. 1.2 отображают дифференциальный закон распределения вероятных мест объекта поиска после первичного его обнаружения.

Графическое изображение закона распределения вероятных мест объекта на плоскости для некоторого фиксированного момента времени t_k показано на рис. 1.3.

Распределение дальностей действия средств обнаружения при поиске. Случайный характер процесса поиска в значительной мере объясняется тем, что основная характеристика средств обнаружения — дальность обнаружения — подвержена влиянию многочисленных факторов.

1. Факторы, определяемые характером объекта поиска. Например, в случае обнаружения объектов в море гидроакустическими средствами такими факторами

будут: тип объекта, его шумовой эффект, отражательная способность, скорость, глубина погружения, курсовой угол и т. д. Для учета их влияния на дальность обнаружения объекта приходится строить различные гипотезы относительно объекта поиска и основываться на экспериментальных данных о влиянии этих факторов на дальность обнаружения различных объектов.

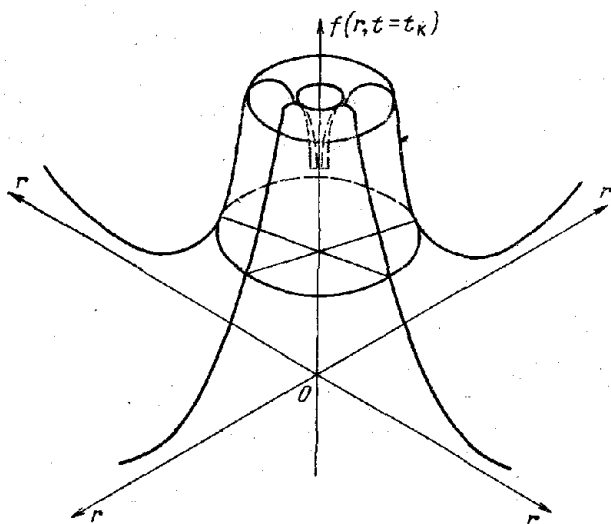


Рис. 1.3. Распределение вероятных мест объекта поиска после его обнаружения (фиксированный момент времени).

2. Условия, определяемые реальной средой, в которой происходит обнаружение. К ним, в первую очередь, относятся метеорологические и гидрологические условия, условия распространения электромагнитных звуковых волн.

3. Тактико-технические параметры станции обнаружения, ее исправность и состояние, режим работы, уровень помех. К этой же группе факторов относятся и субъективные свойства операторов, обслуживающих средства обнаружения, их натренированность и внимание.

Поскольку все эти факторы в реальных условиях подвержены непрерывным и случайным изменениям, то и сама дальность обнаружения является случайной ве-

личной, принимающей при неизменных условиях наблюдения различные значения. Однако теоретические и экспериментальные исследования средств и условий наблюдения позволяют указать вероятность того, что в данных условиях объект поиска может быть обнаружен на дальностях, не меньших некоторого заданного значения. Графически зависимость вероятности от дальности показана на рис. 1.4.

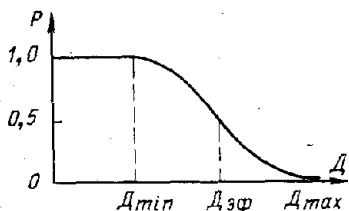


Рис. 1.4. Интегральный закон распределения дальностей обнаружения.

наиболее благоприятному сочетанию физических условий наблюдения. Обнаружение объекта на дальностях, больших максимальной, практически невозможно или имеет ничтожно малую вероятность. Область, ограниченную максимальной дальностью обнаружения, принято называть зоной вероятного обнаружения. Обычно она представляет круг или сектор (рис. 1.5). В пределах этой зоны обнаружение объекта может произойти, а может и не произойти.

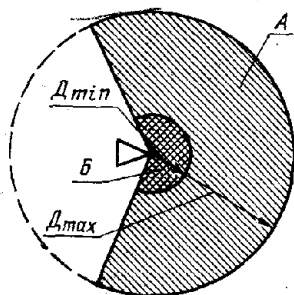


Рис. 1.5. Зоны обнаружения при поиске:

А — вероятного, Б — достоверного.

на расстояние, меньшее, чем $D_{об\ min}$, окажется не обнаруженным, практически исключена. Зона, ограниченная расстоянием $D_{об\ min}$ от наблюдателя, называется зоной достоверного обнаружения.

Закон распределения дальностей обнаружения наиболее полно характеризует средства и условия обнару-

жения. Однако теоретические и экспериментальные исследования средств и условий наблюдения позволяют указать вероятность того, что в данных условиях объект поиска может быть обнаружен на дальностях, не меньших некоторого заданного значения. Графически зависимость вероятности от дальности показана на рис. 1.4.

Анализ закона распределения дальностей обнаружения позволяет сделать следующие выводы. Дальность обнаружения почти никогда не превышает некоторого максимального значения

$D_{об\ max}$, соответствующего наиболее благоприятному сочетанию физических условий наблюдения. Обнаружение объекта на дальностях, больших максимальной, практически невозможно или имеет ничтожно малую вероятность. Область, ограниченную максимальной дальностью обнаружения, принято называть зоной вероятного обнаружения. Обычно она представляет круг или сектор (рис. 1.5). В пределах этой зоны обнаружение объекта может произойти, а может и не произойти.

Для всех расстояний, меньших некоторой величины $D_{об\ min}$, значения показанной на рисунке функции весьма близки к единице. Величина $D_{об\ min}$ называется минимальной дальностью обнаружения. Возможность того, что объект поиска, сблизившийся с наблюдателем

на расстояние, меньшее, чем $D_{об\ min}$, окажется не обнаруженным, практически исключена. Зона, ограниченная расстоянием $D_{об\ min}$ от наблюдателя, называется зоной достоверного обнаружения.

Закон распределения дальностей обнаружения наиболее полно характеризует средства и условия обнару-

жения. Однако пользоваться им в расчетах поиска не всегда удобно, так как при этом приходится иметь дело с весьма сложными вычислениями. Поэтому вместо полной характеристики закона распределения дальностей вводят понятие средней (эффективной) дальности обнаружения $D_{\text{эф}}$: математическое ожидание дальности обнаружения при данных условиях наблюдения.

Для нахождения закона распределения дальности действия Ф. М. Морз и Д. Е. Кимбелл [13] рекомендуют метод, при котором наблюдатель приближается к объекту поиска (или объект приближается к наблюдателю) и фиксируется дальность первого обнаружения.

Используя методы математической статистики, на основе проведенных испытаний находят закон распределения дальности действия и его числовые характеристики. При знании закона распределения дальности действия прибора $f(D)$ и его числовых характеристик вероятность $P_{\text{об } r}$ обнаружения объекта на дальности не менее заданной дальности r определяется интегрированием функции $f(D)$ в пределах от r до $+\infty$:

$$P_{\text{об } r} = \int_r^{\infty} f(D) dD. \quad (1.25)$$

Элементарные вероятности обнаружения объектов поиска. В зависимости от конструктивных особенностей средств наблюдения и способов их использования обследование пространства в процессе проведения поиска может быть непрерывным во времени или дискретным.

Очевидно, если наблюдение ведется с помощью средств ненаправленного действия, то его следует отнести к числу непрерывных. В то же время, если средства направленного действия (радиолокаторы, гидролокаторы и т. п.) используют для обследования пространства в пределах некоторого угла, значительно превышающего ширину диаграммы направленности этих средств (или угол поля зрения при зрительном наблюдении), то обследование следует рассматривать как дискретное. При этом промежутки времени, через которые производятся мгновенные акты наблюдения, зависят от величины обследуемого угла и угловой скорости обследования. Следует отметить, что иногда эти промежутки могут быть настолько малы, что обследование можно считать непрерывным.

В случае дискретного обследования важным критерием для оценки эффективности средств наблюдения при поиске является элементарная вероятность g обнаружения объекта поиска на данной дальности посредством одного мгновенного наблюдения. Если принять, что мгновенные наблюдения производятся при неизменных физических условиях и обнаружение объекта в каждом из них представляет собой независимое событие, вероятность $P_{об}(n)$ обнаружения объекта хотя бы один раз при n мгновенных наблюдениях можно найти в соответствии с теоремой о повторении независимых опытов по формуле

$$P_{об}(n) = 1 - (1 - g)^n. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.26) следует вывод: если физические условия, в которых производится поиск, обеспечивают некоторую вероятность g обнаружения при одном мгновенном наблюдении, то, как бы она мала ни была, вероятность $P_{об}(n)$ может быть сколь угодно близка к единице при достаточно большом n , т. е. событие, заключающееся в обнаружении объекта, почти наверняка наступит.

Чтобы найти среднее значение (математическое ожидание) числа $M(n)$ мгновенных наблюдений, необходимых для обнаружения объекта, следует сначала найти вероятность $P_{об}(n)$ того, что обнаружение произойдет именно при n -м мгновенном наблюдении (а не раньше). Очевидно, что эта вероятность будет равна произведению вероятности того, что обнаружение не состоится при первых $n-1$ мгновенных наблюдениях, на вероятность того, что обнаружение будет иметь место именно при n -м мгновенном наблюдении, т. е. $P_{об}(n) = (1 - g)^{n-1} g$.

Из теории вероятностей известно, что математическое ожидание числа мгновенных наблюдений $M(n)$ может быть найдено, если суммировать произведения $n P_{об}(n)$, а именно:

$$M[n] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_{об}^k \quad (n = k). \quad (1.27)$$

Представим сумму (1.27) в следующем виде:

$$M[n] = \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - g)^{k-1} g. \quad (1.28)$$

Ввиду того, что количество мгновенных наблюдений n , необходимых для обнаружения объекта, в данном случае выступаст как случайная величина, необходимо знать ее дисперсию $D(n)$, т. е. меру рассеивания значений n около его математического ожидания.

Дисперсия количества мгновенных наблюдений

$$D(n) = M(n^2) - [M(n)]^2 = (1 - g)/g^2. \quad (1.29)$$

Среднеквадратическое отклонение (стандарт) количества мгновенных наблюдений

$$\sigma(n) = \sqrt{D(n)} = \sqrt{1 - g}/g. \quad (1.30)$$

Пример 1.2. Объект поиска обнаруживается с помощью радиолокационной станции в среднем за три оборота антенны (за три мгновенных наблюдения, что в данном случае предполагается эквивалентным): $n=3$.

Требуется найти: 1) элементарную вероятность g обнаружения объекта за один оборот антенны радиолокационной станции; 2) дисперсию $D(n)$ количества оборотов антенны радиолокационной станции и среднеквадратическое отклонение $\sigma(n)$; 3) вероятность $P_{об}(n)$ обнаружения объекта за два оборота антенны.

Решение.

$$g = 0,333; D(3) = 6; \sigma(3) = \sqrt{D(3)} = 2,44; P_{об}(2) = 0,555.$$

Если в процессе проведения поиска осуществляется непрерывное обследование, важным критерием для оценки эффективности средств наблюдения по обнаружению объектов является элементарная вероятность γdt обнаружения в течение времени dt . При этом величина γ является элементарной плотностью вероятности числа обнаружений. Это известная нам интенсивность потока обнаружений (интенсивность поиска).

Если обследование производится непрерывно в течение времени t при неизменных физических условиях, вероятность $P_{об}(t)$ обнаружения объекта за время t_n в соответствии с (1.14) и (1.8) определяется по формуле

$$P_{об}(t) = 1 - e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \text{const}. \quad (1.31)$$

График $P_{об}(t)$ при $\gamma = \text{const}$ представлен на рис. 1.6. Анализ формулы показывает, что, если имеется хотя бы малейшая вероятность обнаружения объекта поиска

в течение времени dt (т. е. если $\gamma > 0$), вероятность обнаружения объекта может достигнуть при безграничном увеличении времени обследования значения, сколь угодно близкого к единице.

Чтобы вычислить среднее значение (математическое ожидание) времени $\bar{t}_{об}$, требующееся для обнаружения объекта, необходимо найти выражение для плотности распределения времени как непрерывной случайной величины.

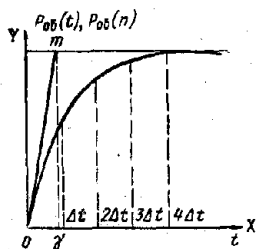


Рис. 1.6. Вероятность обнаружения объекта поиска при непрерывном и дискретном обследовании пространства.

Так как уравнение (1.31) представляет собой функцию распределения случайного времени обнаружения объекта, выражение для плотности распределения времени найдем дифференцированием этого выражения по t :

$$f(t) = \frac{dP_{об}(t)}{dt} = \gamma e^{-\gamma t}. \quad (1.32)$$

Используя общую формулу для математического ожидания и интегрируя по частям, найдем среднее значение времени:

$$\bar{t}_{об} = \int_0^{\infty} t_{п} f(t) dt = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.33)$$

Дисперсия времени обнаружения

$$\begin{aligned} D(t_{об}) &= M(t_{об}^2) - [M(t_{об})]^2 = \int_0^{\infty} t_{п}^2 \gamma e^{-\gamma t_{п}} dt - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\gamma^2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Среднеквадратическое отклонение времени обнаружения

$$\sigma(t_{об}) = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{\gamma} = \bar{t}_{об}. \quad (1.35)$$

Пример 1.3. В результате испытаний прибора наблюдения установлено, что шумы объекта обнаруживались в среднем за $\bar{t}_{об} = 6$ с.

Требуется найти: 1) плотность вероятности числа обнаружений объекта прибором γ ; 2) дисперсию времени обнаружения $D(t_{об})$;

- 3) среднееквадратическое отклонение времени обнаружения $\sigma(t_{об})$;
 4) вероятность $P_{об}(t)$ обнаружения объекта за время $t=10$ с.

Решение.

$$\gamma = 1/t_{об} = 0,167 \text{ с}^{-1}; D(t_{об}) = 36 \text{ с}^2;$$

$$\sigma(t_{об}) = \sqrt{D(t_{об})} = 6 \text{ с.}$$

$$P_{об}(10) = 1 - e^{-\int_0^{10} 0,167 dt} = 1 - e^{-0,167 \cdot 10} = 0,812.$$

Вначале докажем, что среднее значение времени обнаружения $\bar{t}_{об} = 1/\gamma$ является абсциссой точки пересечения касательной к кривой $P_{об}(t)$, проведенной через начало координат, прямой, соответствующей $P_{об}(t) = 1$.

Найдем уравнение касательной, для чего текущие координаты точек касательной обозначим через X и Y (рис. 1.6), а координаты данной точки соответственно через x и y .

При принятых обозначениях уравнение касательной будет иметь следующий вид:

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x). \quad (1.36)$$

Для рассматриваемого случая $x=t$, $y=1-e^{-\gamma t}$, тогда уравнение (1.36) можно представить как

$$Y - 1 + e^{-\gamma t} = \gamma e^{-\gamma t} (X - t)$$

или

$$Y = 1 - e^{-\gamma t} + \gamma e^{-\gamma t} X - \gamma t e^{-\gamma t}. \quad (1.37)$$

Кроме уравнения (1.37), нам известно, что

$$P_{об}(t) = Y = 1. \quad (1.38)$$

Решая уравнения (1.37) и (1.38), найдем абсциссу x точки m пересечения кривой, описываемой равенством (1.31), и прямой, описываемой равенством (1.38), если касательная проходит через точку 0 (или для $t=0$, что в данном случае эквивалентно): $1 = 1 - 1 + \gamma X$, откуда $X = 1/\gamma = \bar{t}_{об}$.

Если отдельные акты обследования производятся с промежутками в одну единицу времени, т. е. $t=1, 2, \dots, n$, то

$$\gamma = -\ln(1-g). \quad (1.39)$$

При этом формулу (1.26) можно привести к виду (1.31) и вероятность обнаружения объекта поиска рассчитывать по единой формуле (1.14): $P_{об} = 1 - e^{-U(n)}$. Потенциал обнаружения $U(t)$ характеризует накопление вероятности обнаружения с течением времени. В зависимости от способа обследования он может быть равен:

— при дискретном обследовании

$$U(t_n) = -n \ln(1 - g), \quad (1.40)$$

— при непрерывном обследовании

$$U(t_n) = \gamma t. \quad (1.41)$$

Следовательно, рис. 1.6 может выполнять не только свое основное назначение, но и служить для графического изображения функции (1.26) и определения вероятности $P_{об}(n)$ обнаружения объекта за конечное количество мгновенных наблюдений n при дискретном обследовании. Правда, в последнем случае будут использоваться только дискретные точки кривой для моментов времени $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$, где Δt — время обследования, всегда известное на практике.

Как видно из формул (1.28) и (1.33), элементарная вероятность g при дискретном обследовании и мгновенная плотность вероятности γ при непрерывном обследовании связаны простейшими зависимостями соответственно со средним количеством мгновенных наблюдений $M(n)$ и средним временем обследования $\bar{t}_{об}$, необходимыми для обнаружения того или иного объекта при данных физических условиях.

Следовательно, указанные формулы могут служить основой при разработке специальных методик по проведению испытаний новых образцов средств наблюдения и определению численных значений g и γ как новых, так и существующих средств. В свою очередь, наличие численных значений g и γ позволяет производить сравнительную количественную оценку эффективности средств наблюдения по обнаружению различных объектов. Вероятности g и $\gamma \Delta t$, рассмотренные выше, пригодны для оценки эффективности средств наблюдения лишь в том случае, если расстояние r между наблюдателем и объектом в процессе проведения поиска остается неизменным, т. е. когда наблюдатель и объект неподвижны или когда вектор скорости наблюдателя V_n равен

вектору скорости объекта V_0 . На практике чаще создаются такие условия, когда расстояние r не является постоянной величиной и элементарные вероятности обнаружения изменяются со временем.

Меняющиеся значения элементарных вероятностей обозначим через g_i и $\gamma_i dt$, где g_i — элементарная вероятность обнаружения объекта поиска для i -го мгновенного наблюдения, а γ_i — плотность вероятности обнаружения объекта, меняющаяся со временем. Формулы для расчета вероятностей обнаружения в данном случае будут иметь вид:

— при дискретном обследовании

$$P_{об} = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2)(1 - g_3) \dots (1 - g_i) \dots (1 - g_n) = \\ = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - g_i); \quad (1.42)$$

— при непрерывном обследовании

$$P_{об} = 1 - e^{-\int_0^t \gamma_i \tau d\tau}. \quad (1.43)$$

Как было сказано выше, аналитические выражения для расчета элементарных вероятностей обнаружения могут быть найдены, если известен закон распределения дальности действия средств наблюдения $f(D)$. Предположив, что опыты по определению $f(D)$ проводятся в условиях постоянства факторов, определяющих закономерности изменения дальности действия (основные факторы), элементарную вероятность обнаружения g_i и плотность вероятности обнаружения γ_i можно считать зависящими только от расстояния r между наблюдателем и объектом поиска, т. е.

$$g_i = g_i(r); \quad \gamma_i = \gamma_i(r). \quad (1.44)$$

1.4. НОРМАТИВНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

Формальное определение и классификация экстремальных моделей. Экстремальная модель задается целевой функцией $f(x)$ n переменных $x_1, \dots, x_n$ на множестве M n -мерного пространства. В свою очередь, мно-

жество M задается с помощью уравнений или неравенств

$$g_i(x)=0, \quad i=1, \dots, k;$$

$$g_i(x)\leq 0, \quad i=k+1, \dots, l;$$

$$g_i(x)\geq 0, \quad i=l+1, \dots, m,$$

где $g_i(x) = g_i(x_1, \dots, x_n)$ — известные функции n переменных, которые называются ограничениями экстремальной модели.

Оптимальный алгоритм поиска приводит к глобальному максимуму или минимуму целевой функции.

Глобальный максимум (минимум) функции $f(x)$ на множестве M — это такое значение $f(x^*)$ функции, при котором для любых x из M справедливо неравенство $f(x^*) \geq f(x)$ ($f(x^*) \leq f(x)$). Точка $x^* \in M$ называется точкой глобального максимума (минимума) функции $f(x)$ на множестве M .

Обычно точка x^* называется оптимальной (оптимальным решением), а глобальный максимум (минимум) $f(x^*)$ целевой функции $f(x)$ на множестве M — оптимальным значением экстремальной модели, или оптимумом.

При отсутствии ограничений оптимум экстремальной модели, являющейся дифференцируемой функцией одной переменной, можно найти, применив классические методы анализа. Для функции нескольких переменных такой подход возможен лишь в простейших случаях. Как правило, он очень сложен и часто его заменяют методами экспериментального нахождения максимума или минимума функции.

Введение ограничений существенно увеличивает сложность модели. В этих случаях, даже если целевая функция дифференцируема, экстремум не может быть определен с помощью классических методов анализа при условии, что он не лежит внутри области, определенной совокупностью ограничений. Если же целевую функцию дифференцировать нельзя или число переменных велико, то найти экстремум можно только с помощью численных методов математического программирования.

Нахождение экстремумов выпуклых функций на выпуклом множестве является задачей выпуклого программирования, а для поиска экстремумов широкого

класса нелинейных и дискретных целевых функций можно использовать динамическое программирование.

Экспериментальный метод нахождения экстремума. Пусть, например, известно, что целевая функция переменной $f(x)$ достигает минимума в точке $\bar{x}$ интервала $[0, L]$, до которой она убывает, а затем возрастает. Кроме того, есть возможность определять ее значения, хотя вид функции и неизвестен. Например, если выбраны три точки $x_1 < x_2 < x_3$, то при $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ минимум лежит в $[0, x_1]$; при $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ — в $[x_1, x_3]$; при $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ — в $[x_3, L]$.

Итак, всегда можно найти интервал, содержащий минимум. Обычно желательно иметь этот интервал таким, чтобы точка $\bar{x}$, в которой достигается минимум, была определена с точностью ϵ , т. е. $f(x-\epsilon) > f(x) < f(x+\epsilon)$, где $x \in [0, L]$ — приближенное значение $\bar{x}$, в котором достигается минимум.

Вполне очевидный план, приводящий к определению $\bar{x}$ с точностью ϵ , состоит в систематическом вычислении значения функции

$$f(0), f(\epsilon), f(2\epsilon), \dots, f(r\epsilon), \quad (1.45)$$

где $f((r+1)\epsilon) > L$. Тогда точка $k\epsilon$, для которой значение функции будет наименьшим в последовательности (1.45), и будет искомой. Однако этот план не совсем экономичен, так как число вычисляемых значений функции f в наихудших условиях (когда точка $\bar{x}$ совпадает с концом отрезка L) будет равно r , т. е. максимально. Более экономичным является вычисление последовательности (1.45) через один член, а именно:

$$f(0), f(2\epsilon), f(4\epsilon). \quad (1.46)$$

Для наименьшего числа последовательности (1.46) вычислим два значения функции: $f((2k-1)\epsilon)$ и $f((2k+1)\epsilon)$. Наименьшее из трех значений функции f в точках $(2k-1)\epsilon$, $2k\epsilon$ и $(2k+1)\epsilon$ будет отличаться от минимального значения этой функции не более чем на ϵ . Этот план определения $\bar{x}$ в наихудших условиях требует примерно $r/2+2$ вычислений, что существенно меньше по сравнению с первым планом.

Уменьшение числа вычислений вызвано зависимостью процедуры второго плана от результатов предыдущих вычислений, т. е. вычисления последовательности (1.46). Аналогично можно прийти к наиболее эко-

номичному плану, сравнивая каждое вновь полученное значение функции f с теми или иными из ее значений, полученных в результате предыдущих вычислений. Такой план называется n -шаговым планом или планом Φ_n , а его алгоритм, как показано Воробьевым [5], записывается следующим образом.

1°. Сравнить 1 и n ; если $n=1$, то перейти к п. 2°, если $n>1$, то перейти к п. 4°.

2°. Вычислить $\bar{x}=(x'+x'')/2$, где $x'=0$ и $x''=L$.

3°. Вычислить $f(\bar{x})$, и на этом процесс заканчивается.

4°. Вычислить $x_1=x'+(U_n/U_{n+2})(x''-x')$; $x_2=x''+(U_{n+1}/U_{n+2}) \times (x''-x')$, где U_n — последовательность чисел Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, ..., полученных из рекуррентного соотношения $U_k=U_{k-1}+U_{k-2}$, $k \geq 1$; $U_1=U_2=1$.

5°. Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

6°. Сравнить 2 и n : если $n=2$, то перейти к п. 7°; если $n>2$, то перейти к п. 10°.

7°. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$: если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то перейти к п. 8°; если $f(x_1) > f(x_2)$, то перейти к п. 9°.

8°. Положить $\bar{x}=x_1$ и закончить процесс.

9°. Положить $\bar{x}=x_2$ и закончить процесс.

10°. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$: если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то перейти к п. 11°; если $f(x_1) > f(x_2)$, то перейти к п. 14°.

11°. Переобозначить x_2 через x'' , x_1 через x_2 , $n-1$ через n .

12°. Вычислить $x'_1 = x' + \frac{U_n}{U_{n+2}}(x'' - x')$.

13°. Вычислить $f(x_1)$ и перейти к п. 6°.

14°. Переобозначить x_1 через x' , x_2 через x_1 , $n-1$ через n .

15°. Вычислить $x_2 = x' + \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}(x'' - x')$.

16°. Вычислить $f(x_2)$ и перейти к п. 6°.

Погрешность, с которой определяется $\bar{x}$ на отрезке длиной L , рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = L/U_{n+2}. \quad (1.47)$$

Таким образом, с помощью плана Φ_n на основе n измерений определяется точка $\bar{x}$, в которой значение функции f на отрезке длиной L отличается от минимума

¹ Рекуррентными (возвратными) называются такие последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих. Сам процесс последовательного определения элементов таких последовательностей называется рекуррентным процессом.

не более чем на ε . Совершенно ясно, что с соответствующими изменениями данный алгоритм справедлив и для отыскания максимума.

Пример 1.4. Рассмотрим промысловый поиск барабули у берегов Краснодарского края и Грузии. Как известно, барабуля — рыба донная и прибрежная, осенний ход которой происходит на глубинах от 5 до 50 м. Вероятность встречи с барабулей между этими глубинами различна и является непрерывной функцией расстояния от берега. Пусть за критерий эффективности принято число часов, затраченное на отлов 10 кг барабули на различном расстоянии от берега, и считается, что целевая функция имеет глобальный минимум. Предположим, что производится 5 экспериментов на глубинах от 5 до 50 м.

1°. Так как $n \neq 1$, переходим к п. 4°.

4°. Вычисляем

$$x_1 = x' + \frac{U_n}{U_{n+1}} (x'' - x') = 22,2,$$

$$x_2 = x' + \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} (x'' - x') = 32,6.$$

5°. Имеем $f(x_1) = f(22,2) = 14$; $f(x_2) = f(32,6) = 10$.

6°. Так как $n = 5 > 2$, то переходим к п. 10°.

10°. Поскольку $f(x_1) > f(x_2)$, то переходим к п. 14°.

14°. Переобозначаем: $x_1 \rightarrow x' = 22,2$; $x_2 \rightarrow x_1 = 32,6$; $n = 4$.

15°. Вычисляем

$$x_2 = x' + \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} (x'' - x') = 27.$$

16°. Имеем $f(x_2) = f(27) = 12$ и переходим к п. 6°.

6°. Поскольку $n > 2$, переходим к п. 10°.

10°. Так как $f(x_1) = f(32,6) = 10 < f(x_2)$, переходим к п. 11°.

11°. Переобозначаем: $x_2 \rightarrow x' = 27$, $x_1 \rightarrow x_2 = 32,6$, $n = 3$.

12°. Вычисляем:

$$x_1 = x' + \frac{U_n}{U_{n+2}} (x'' - x') = 24,1.$$

13°. Имеем $f(x_1) = f(24,1) = 11,5$ и переходим к п. 6°.

6°. Поскольку $n > 2$, переходим к п. 10°.

10°. Сравниваем $f(x_1) = f(24,1) = 11,5$ и $f(x_2) = f(32,6) = 10$; поскольку $f(x_1) > f(x_2)$, переходим к п. 14°.

14°. Переобозначаем: $x_1 \rightarrow x' = 24,1$; $x_2 \rightarrow x'' = 27$; $n = 2$.

15°. Вычисляем

$$x_2 = x' + \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} (x'' - x') = 26.$$

16°. Имеем $f(x_2)=f(26)=11$ и переходим к п. 6°.

6°. Так как $n=2$, переходим к п. 7°.

7°. Сравниваем $f(x_1)=f(32,6)=10$ и $f(x_2)=f(26)=11$, $f(x_1) < f(x_2)$, поэтому переходим к п. 8°.

8°. Полагаем $\bar{x}=32,6$.

На основании (1.47) найденное $\bar{x}$ может отличаться от истинного не более чем на $(50-5)/U_7=3,5$.

Таким образом, можно полагать, что встреча с косяком барабули более вероятна на глубинах от 29 до 36 м. Следовательно, применение описанного метода позволит уточнить систему поисковых галсов.

Экстремальная модель линейного программирования. Большинство поисковых ситуаций связано с распределением ограниченного числа поисковых ресурсов. Для выбора оптимального способа распределения таких ресурсов могут успешно применяться линейные экстремальные модели с ограничениями или, как их обычно называют, модели линейного программирования. Эти модели дают возможность проанализировать довольно широкий спектр возможных планов распределения поисковых ресурсов. Однако для построения линейной модели необходимо принять два допущения (аксиомы линейности) относительно поискового процесса.

Согласно первому допущению (делимости) все показатели поискового процесса можно увеличить или уменьшить при сохранении взаимной пропорциональности, а кроме того, они могут принимать не только целочисленные, но и дробные значения.

Второе допущение (аддитивность) предполагает, что если все значения каждой из управляемых переменных определены, то полное количество каждого из затраченных поисковых ресурсов равно сумме одноименных ресурсов, затраченных при реализации всех применявшихся способов поиска, а суммарная эффективность поиска равна сумме эффективностей, полученных в результате реализации всех этих способов.

Таким образом, аксиомы делимости и аддитивности означают, что применительно к фиксированному поисковому процессу эффективность строго пропорциональна затраченным ресурсам. Постулирование этих свойств позволяет использовать для отображения поискового процесса линейные модели.

В общем виде такая модель описывается следующим образом. Пусть показатель эффективности представляет

своей линейную функцию (линейную форму) управляемых параметров $x = (x_1, \dots, x_n)$, т. е. целевая функция задана следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (1.48)$$

На область возможных значений управляемых переменных наложены линейные ограничения

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1.49)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.50)$$

Требуется найти такие значения управляемых переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие условиям (1.49), (1.50), при которых целевая функция $f(x)$ обращается в минимум. Если по условиям поисковой ситуации требуется отыскать максимум $f(x)$, то можно вместо $f(x)$

рассматривать функцию $f^*(x) = \sum_{j=1}^n c^*_j x_j$, где $c^*_j = -c_j$.

Тогда минимум $f^*(x)$ будет соответствовать максимуму $f(x)$.

Линейные ограничения могут быть заданы и в виде неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.51)$$

В этом случае, вводя в каждое линейное ограничение дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, сводят систему линейных ограничений к виду (1.49). Разумеется, переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ добавляются к $f(x)$ с нулевыми коэффициентами. Если же линейные ограничения заданы в виде неравенств

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$, то умножением на -1 они предварительно

преобразовываются к виду (1.51), а затем к виду (1.49).

Набор управляемых переменных, удовлетворяющих ограничениям, называется допустимым решением, а допустимое решение, минимизирующее целевую функцию — оптимальным. Среди методов нахождения оптимального решения наибольшее распространение полу-

чил метод, использующий идею последовательного улучшения допустимого решения. Существует несколько вычислительных алгоритмов, реализующих эту идею. Из них наиболее эффективным является симплексный метод, который состоит из одинаковых повторяющихся этапов — итераций. Каждая итерация включает построение допустимого решения, проверку его на оптимальность и улучшение в случае неоптимальности. В результате конечного числа итераций получается оптимальное решение. В общем виде вычислительная процедура симплексного метода выглядит так: $(n-m > 0)$.

Шаг 1. Выбирается m управляемых переменных $x_1, \dots, x_m$. Если для этих переменных определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}^1 \neq 0,$$

то они называются базисными, а остальные $n-m$ переменные — небазисными.

Система линейных ограничений (1.49) решается относительно базисных переменных способом полного исключения (так называемое жорданово исключение). Для этого уравнения системы (1.49) располагают в таком порядке, чтобы в уравнении за порядковым номером i коэффициент при x_i не был равен нулю. Затем коэффициенты при базовых переменных приводят к единице, а в каждом из уравнений оставляют по одной базовой переменной. Так, все коэффициенты первого уравнения делят на коэффициент при x_1 . Для исключения переменной x_1 из остальных уравнений отнимают от каждого из них первое уравнение, умноженное на такое число, при котором разность коэффициентов при x_1 была бы равна нулю. В результате таких преобразований для x_1 в первом уравнении получаем

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}} \right) x_3 + \dots + \\ + \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}a_{21}}{a_{11}} \right) x_n &= b_2 - \frac{b_1a_{21}}{a_{11}}; \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

¹ Здесь и далее матрица обозначается $A = |a_{ij}|$.

Для полученного опорного плана целевая функция принимает следующий вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i. \quad (1.54)$$

Шаг 2. Вычисляется величина

$$\delta_j = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} - c_j \text{ для } j = m+1, \dots, n, \quad (1.55)$$

где индекс j приписывается небазисным переменным, а индекс i — базисным.

Если $\delta_j \leq 0$, то полученный опорный план является оптимальным. В противном случае необходимо перейти к третьему шагу симплексного метода — построению следующего опорного плана, для которого значение целевой функции меньше, чем в предыдущем.

Шаг 3. В базис включается та переменная, для которой δ_j принимает наибольшее положительное значение. Затем из всех положительных отношений β_i/α_{ij} выбирается наименьшее, а соответствующий этому отношению β_s/α_{sj} индекс s определяет номер переменной, исключаемой из базиса. Для новой базисной величины повторяется вычислительная процедура полного исключения, т. е. вновь решается система m уравнений относительно переменных, вошедших в новое допустимое решение. В результате строится улучшенный опорный план и далее следует переходить к шагу 2.

Пример 1.5. Пусть m — число различных приборов, каждый из которых используется для обнаружения того или иного полезного ископаемого, а n — число поисковых партий. Допустим также, что поисковая партия j -го типа ($j=1, \dots, n$) может взять a_{ij} приборов i -го типа ($i=1, \dots, m$), общее число которых равно b_i . При этом время, затрачиваемое j -й партией на геологическую разведку, равно c_j . Требуется определить число поисковых партий каждого типа, при которых суммарное время геологической разведки будет минимальным.

Таким образом, необходимо найти набор переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям $[x_j \geq 0, j=1, \dots, n; g_i(x) =$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=1, \dots, m, \text{ и минимизирующих целевую функцию}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

В результате построена экстремальная модель линейного программирования, для решения которой воспользуемся симплексным методом.

Допустим, что ограничения описаны системой четырех уравнений с шестью переменными, а именно:

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + x_4 &= 16, \\ 2x_2 + x_5 &= 10, \\ x_2 + 2x_4 + 6x_6 &= 76, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 &= 24, \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 3x_6.$$

Смысл первого уравнения системы (1.56) состоит в том, что поисковая партия первого типа может взять из 16 приборов первого типа только четыре, а партия четвертого типа — только один. Аналогично емдел и остальных уравнений системы (1.56).

Составим и вычислим определитель из коэффициентов при переменных x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

Так как этот определитель не равен нулю, переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются базисными и система (1.56) может быть разрешима относительно данных величин.

Мением первое и четвертое уравнения местами, чтобы коэффициент при x_4 в четвертом уравнении не был равен нулю. Исходная матрица коэффициентов имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Выполняем необходимые преобразования способа полного исключения, начиная с коэффициента при x_1 в первой строке. Для этого делим первую строку на 4, а от второй, третьей и четвертой строк отнимаем первую строку, умножаем соответственно на 0, 0 и 1, что дает

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}.$$

Аналогичные преобразования выполняем для переменной x_2 во второй строке и x_3 в третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/8 & 1/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/8 & 1/4 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Результат преобразования для переменной x_4 в четвертой строке удобно записать в виде таблицы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

i	j	1	2	3	4	5	6	θ_i
	c_i	c_j						
		4	5	2	8	6	3	
1	4	1	0	0	0	-3/8	1/4	9/4
2	5	0	1	0	0	1/2	0	5
3	2	0	0	1	0	3	2	62
4	8	0	0	0	1	3/2	-1	7
δ_j		0	0	0	0	13	-3	$f(x)=214$

В таблице индекс j приписывается всем неизвестным, а индекс i — только базисным переменным. На пересечении i -й строки и j -го столбца находятся коэффициенты при переменных из системы ограничений (1.53). Нижняя строка вычисляется по формуле (1.55).

На основании табл. 1.1 опорный план имеет вид

$$x_1=9/4, \quad x_2=5, \quad x_3=62, \quad x_4=7, \quad x_5=x_6=0,$$

причем $f(x)=214$. Однако этот план не оптимален, так как $\delta_5 > 0$. Для улучшения опорного плана в базис вводим переменную x_5 , так как наибольшей из положительных δ_j оказалась δ_5 . Из базиса выводится переменная x_4 , которой соответствует минимальное положительное значение отношения β_i/α_{i5} , а именно $5/\alpha_{45}$.

Для осуществления перехода к новому базису (x_1, x_2, x_3, x_5) необходимо:

— заменить в четвертой строке $i=4$ на $i=5$ и $c_4=8$ на $c_5=6$;

— элементы четвертой строки разделить на опорный элемент $a_{45} = 3/2$, вследствие чего коэффициент при новой базисной переменной x_5 приводится к единице;

— заполнить остальные строки, соответствующие старым базисным переменным, повторив вычислительную процедуру полного исключения.

Таблица 1.2

i	f	1	2	3	4	5	6	θ_i
	c_i	c_j						
		4	5	2	8	6	3	
1	4	1	0	0	0	0	0	4
2	5	0	0	0	0	0	1/3	8/3
3	2	0	0	1	0	0	4	48
4	0	0	0	0	2/3	1	-2/3	14/3
h_j		0	0	0	-4	0	8/3	$f(x)=153,3$

Результат приведен в табл. 1.2. Во втором опорном плане $x_1=4$, $x_2=8/3$, $x_3=48$, $x_4=0$, $x_5=14/3$, $x_6=0$. Для этого плана $f(x)=153,3$, т. е. новый план лучше первоначального, однако $\delta_5 > 0$, что свидетельствует о необходимости дальнейшего улучшения плана. Улучшенный план можно получить, если ввести переменную x_6 , а вывести переменную x_2 , для которой отношение θ_i/a_{i6} является наименьшей положительной величиной.

После преобразования получим для базиса (x_1, x_2, x_3, x_6) табл. 1.3.

Таблица 1.3

i	f	1	2	3	4	5	6	θ_i
	c_i	c_j						
		4	5	2	8	6	3	
1	4	1	0	0	0	0	0	4
6	3	0	3	0	0	0	1	8
3	2	0	-12	1	0	0	0	16
5	6	0	2	0	2/3	1	0	10
δ_j		0	-8	0	-4	0	0	$f(x)=132$

Поскольку среди значений δ_j нет ни одного положительного, то план найден. В этом плане $x_1=4$, $x_2=0$, $x_3=16$, $x_4=0$, $x_5=8$, $f(x)=-132$.

Таким образом, поисковых партий первого типа следует иметь 4, партий третьего типа — 16, партий пятого типа — 10, партий шестого типа — 8, а остальных типов — 0. В этом случае суммарное время геологической разведки будет минимальным и равным 132 усл. ед.

Экстремальная модель выпуклого программирования. Довольно часто обнаружение того или иного объекта связано с необходимостью проведения n поисковых действий. В каждом из таких действий затрачиваются ресурсы объема x_j , которые приводят к результату $f_j(x_j)$. Если действия не пересекаются между собой, т. е. независимы, то можно предположить, что общий результат $f(x_1, \dots, x_n)$ всех затраченных ресурсов X более чем в одном действии равен сумме отдельных результатов от каждого вида ресурсов в каждом поисковом действии. Естественно потребовать, чтобы за счет распределения ресурсов общий результат был максимальным (минимальным).

Таким образом, необходимо найти вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^n x_j = X, \quad (1.57)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.58)$$

и максимизирующий (минимизирующий) целевую функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j). \quad (1.59)$$

Если известно, что функции f_j (а следовательно, и f) являются выпуклыми или вогнутыми¹, то экстремальная

¹ Функция $f(x)$ называется выпуклой по x , если

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

$$(x_1, x_2 \in x; 0 \leq a \leq 1).$$

Функция $f(x)$ называется вогнутой по x , если

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \geq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

$$(x_1, x_2 \in x; 0 \leq a \leq 1).$$

Свойство выпуклости или вогнутости функции устанавливается вычислением ее вторых производных (если они существуют): при $f''(x) \geq 0$ для $0 \leq x \leq 1$ функция $f(x)$ является выпуклой; при $f''(x) \leq 0$ для $0 \leq x \leq 1$ функция $f(x)$ является вогнутой.

модель (1.57) — (1.59) относится к классу моделей выпуклого программирования.

Для решения ряда моделей выпуклого программирования (1.57) — (1.59) используется лемма Гиббса¹. Как следует из этой леммы, если существует число λ , при котором

$$f'_j(x^*_j) \begin{cases} = \lambda, & \text{если } x^*_j > 0, \\ \leq \lambda, & \text{если } x^*_j = 0, \end{cases} \quad (1.60)$$

то вектор $x^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)$ максимизирует вогнутую функцию $\sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ в области $\sum_{j=1}^n x_j = X$ и $x_j \geq 0$.

Аналогично, если существует число λ , при котором

$$f'_j(x^*_j) \begin{cases} = \lambda, & \text{если } x^*_j > 0, \\ \geq \lambda, & \text{если } x^*_j = 0, \end{cases} \quad (1.61)$$

то вектор $x^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)$ минимизирует выпуклую функцию $\sum_{j=1}^n f_j(x_j)$ в области $\sum_{j=1}^n x_j = X$ и $x_j \geq 0$.

Решение экстремальной модели выпуклого программирования вида (1.57) — (1.59) сводится к определению x^*_j посредством условия (1.60) или (1.61) через константу λ . В свою очередь, λ определяется подстановкой решения в уравнение (1.57). На практике, как показано Саати [17], эта вычислительная процедура довольно легко выполняема [17].

Пример 1.6. Допустим, что после аварии летательного аппарата его необходимо обнаружить не более чем за время X . Известно, что он находится с вероятностями $a_1, \dots, a_n$ в одном из районов, число которых равно n , а число обнаружений m в каждом районе распределено по закону Пуассона, т. е. вероятность обнаружения m раз в j -м районе выражается формулой

$$P_j(m) = \frac{b_j^m}{m!} e^{-b_j},$$

где b_j — математическое ожидание числа обнаружений в единицу времени.

¹ Equilibrium of Heterogeneous Substances. Collected Works, Yale University Press, 1876.

Очевидно, что вероятность обнаружения в единицу времени ровно 0 раз равна e^{-b_j} , а вероятность обнаружения хотя бы один раз равна $1 - e^{-b_j}$. Тогда вероятность обнаружения аварийного аппарата при затратах времени $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ в различных районах равна

$$\sum_{j=1}^n a_j (1 - e^{-b_j \bar{x}_j}),$$

где $\bar{x}_j$ — время поиска в j -м районе.

Требуется определить время поиска $\bar{x}_j$ в j -м районе ($j=1, \dots, n$) так, чтобы $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j = X$, а вероятность обнаружения летательного аппарата была максимальной. Следовательно, надо найти вектор $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*)$, который удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_j = X, \quad (1.62)$$

$$\bar{x}_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad (1.63)$$

и максимизирует целевую функцию

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{j=1}^n a_j (1 - e^{-b_j \bar{x}_j}). \quad (1.64)$$

Положив $x_j = \bar{x}_j / X$, можно считать, что $X=1$. Тогда задачу максимизации целевой функции $a_j (1 - e^{-b_j x_j})$ можно заменить минимизацией функции $\sum_{j=1}^n a_j e^{-b_j x_j}$ при условии, что $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ и $x_j \geq 0$.

Предположим, что величины a_j и b_j положительные. Найдем

$$f'_j(x_j) = -a_j b_j e^{-b_j x_j}.$$

Согласно выражению (1.61) имеем

$$-a_j b_j e^{-b_j x_j} \begin{cases} = \lambda, & \text{если } x_j > 0, \\ \geq \lambda, & \text{если } x_j = 0. \end{cases} \quad \lambda \leq 0 \quad (1.65)$$

Из формулы (1.65) видно, что если $-a_j b_j \geq 1$, то $x_j = 0$, так как $e^{-b_j x_j} < 1$. При $-a_j b_j < 1$ равенство $x_j = 0$ невозможно, так как из второй строки формулы (1.65) следует, что $-a_j b_j \geq \lambda$. Отсюда на-

ходим, что $x_j > 0$, и поэтому справедлива верхняя строка формулы (1.65), т. е. $-a_j b_j e^{-b_j x_j} = \lambda$, если $a_j b_j < \lambda$.

Решение последнего уравнения тривиально и оно дает ненулевые значения x_j^*

$$x_j^* = \frac{1}{b_j} \ln \left(-\frac{a_j b_j}{\lambda} \right) \text{ для } -a_j b_j < \lambda. \quad (1.66)$$

Величина λ определяется подстановкой (1.66) в дополнительное условие $\sum_{j=1}^n x_j^* = 1$, т. е. λ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$h(\lambda) = \sum_j \frac{1}{b_j} \ln \left(-\frac{a_j b_j}{\lambda} \right) = 1, \quad (1.67)$$

где j пробегает все значения, для которых удовлетворяется неравенство $-a_j b_j < \lambda$. Легко установить, что каждое слагаемое уравнения (1.67) при $0 > \lambda > \max(-a_j b_j)$ увеличивается, а число слагаемых изменяется, только когда λ проходит через величину $a_j b_j$. Кроме того, когда λ проходит через значение $a_j b_j$, то слагаемые, которые отбрасываются, равны нулю. Следовательно, функция $h(\lambda)$ является непрерывной строго возрастающей функцией аргумента λ и равна единице для некоторого значения λ , которое и является искомым. На основании этого вычислительная процедура определения выглядит следующим образом:

а) вычислить $a_j b_j$, расположить в порядке $a_{i_1} b_{i_1} > a_j b_j$ для $i > j$ и перенумеровать согласно следующей форме:

j старое $j_1, j_2, \dots, j_n$
 j' новое $1, 2, \dots, n$

б) вычислить для $\lambda_1 = -a_2 b_2$

$$h(\lambda_1) = -\frac{1}{b_1} \ln \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2};$$

в) вычислить для $\lambda_2 = -a_3 b_3$

$$h(\lambda_2) = \frac{1}{b_1} \ln \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} + \frac{1}{b_2} \ln \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3}$$

и так далее, пока еще сумма меньше единицы. Обозначить j_0 последний индекс, при котором вычисленная сумма меньше единицы;

г) вычислить

$$\lambda_0 = a_{j_0} b_{j_0} \exp \left(\frac{h(-a_{j_0} b_{j_0}) - 1}{\sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{b_j}} \right);$$

д) вычислить

$$x^*_j = \begin{cases} \frac{\ln \left(-\frac{a_j b_j}{\lambda_0} \right)}{b_j} & \text{если } -a_j b_j < \lambda_0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $X=10$ ч, а величины a_j и b_j принимают значения, приведенные в табл. 1.4. Вычислить

Таблица 1.4

j	b_j	a_j	$a_j b_j$	j'
1	0,51	0,27	0,138	3
2	0,65	0,31	0,202	2
3	0,85	0,42	0,357	1

$$h(\lambda_1) = \frac{1}{b_1} \ln \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = 0,74,$$

$$h(\lambda_2) = \frac{1}{b_1} \ln \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} + \frac{1}{b_2} \ln \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} = 1,61 > 1.$$

Следовательно, $j_0=2$. Находим $\lambda_0=-0,123$. $x^*_1=0,81$, $x^*_2=1-x^*_1=0,19$, так как $j'_0=2$. Возвращаясь к старой нумерации, имеем $x^*_1=0$, $x^*_2=0,19$, $x^*_3=0,81$. Отсюда $t_1=0$ ч, $t_2=1,9$ ч, $t_3=8,1$ ч.

Таким образом, поиск самолета, потерпевшего аварию, целесообразно осуществлять в районах 2 и 3, затратив 1,9 ч и 8,1 ч соответственно.

Экстремальная модель динамического программирования. Во многих поисковых ситуациях процесс поиска может состоять из нескольких этапов, каждому из которых соответствует один из возможных способов действий. Совокупность этих способов составляет программу поискового процесса. Очевидно, что программа будет оптимальной в том случае, если при ее реализации достигается экстремум критерия эффективности. Определение такой программы осуществляется с помощью методов динамического программирования. Следует заметить, что динамическое программирование используется и в том случае, если расчленение производится искусственно. Необходимость такого расчленения обычно обусловлена тем, что целевая функция и ограничения являются нелинейными, а использование аналити-

ческих методов отыскания экстремума целевой функции многих переменных при большом числе этапов практически исключается.

Принцип оптимальности динамического программирования, позволяющий последовательно шаг за шагом получить оптимальную программу поискового процесса, формулируется следующим образом.

Оптимальное поведение¹ обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние системы S_n^2 и начальное решение x_n , последующие решения x_{n-j} ($j=1, \dots, n-1$) должны составлять оптимальное поведение по отношению к состоянию S_{n-j} , полученному в результате $(n-j+1)$ -го решения. Отсюда следует, что для любого состояния системы, к которому она бы ни пришла, поведение должно быть оптимальным для всех оставшихся шагов. При этом, если выполнено k решений, то влияние $n-k$ шагов на величину критерия эффективности в конце процесса зависит только от состояния системы после k -го решения и последующих решений.

Принцип оптимальности динамического программирования приводит к функциональному уравнению, в котором максимальная величина критерия эффективности за n шагов (от первого до n -го) выражается рекуррентно через максимальную величину того же критерия за $n-1$ шагов (от второго до n -го). В свою очередь, максимальная величина критерия эффективности за $n-1$ шагов (от второго до n -го) выражается рекуррентно через максимальную величину того же показателя за $n-2$ шагов (от третьего до n -го) и т. д.

Существует каноническая форма записи рекуррентного соотношения динамического программирования, которая имеет следующий вид:

$$f_n(s) = \underset{x_n \in X_n(s)}{\text{opt}} \{R_n(s, x_n) + f_{n-1}[T_n(s, x_n)]\},$$

¹ Поведением называется последовательность возможных решений. Поведение, при котором функция критерия эффективности достигает своего максимального значения, называется оптимальным поведением.

² Индекс n означает тот шаг, при котором до конца процесса осталось n шагов, т. е. все переменные с индексом n относятся к тому моменту времени, от которого до конца процесса остается n шагов.

где $f_n(s)$ — целевая функция, значение которой соответствует оптимальному поведению от некоторого состояния системы s , если до конца процесса остается n шагов; x_n — решение, выбираемое на шаге n ; $X_n(s)$ — все допустимые значения x_n при условии, что система находится в состоянии s ; $R_n(s, x_n)$ — непосредственный эффект, достигаемый в результате выбора решения x_n при заданном состоянии системы s ; $T_n(s, x_n)$ — преобразованное состояние системы на шаге $(n-1)$, а opt означает максимум или минимум в зависимости от поставленной задачи.

Вычислительная процедура динамического программирования распадается на два этапа: предварительный и окончательный. Предварительный этап начинается с планирования последнего шага. Для этого определяется функция $f_1(s)$ как максимум критерия эффективности, получающегося в результате последнего шага. Поскольку состояние системы перед последним шагом неизвестно, то величина максимального значения критерия $f_1(s)$ определяется параметрически, т. е. на основании всех предположений о результатах предпоследнего шага. Этим самым находится условно оптимальная программа процесса поиска на последнем шаге или, другими словами, те способы поиска, которые надо применить, если предпоследний шаг закончится определенным образом. Затем с помощью аналогичного функционального уравнения параметрически определяется функция $f_2(s)$, выражающая зависимость максимального значения критерия эффективности на двух последних шагах от параметров системы перед этими шагами. На следующем шаге определяется $f_3(s)$ и так далее, пока не будет таким многократным использованием рекуррентного функционального уравнения найдена функция $f_n(s)$, выражающая зависимость максимального значения критерия эффективности всей программы процесса поиска от начального состояния. На этом завершается предварительная (условная) оптимизация, в результате которой, двигаясь во временной последовательности «обратно», найдено условно оптимальное n -шаговое поведение $(x_1, \dots, x_n)$ и максимальное значение критерия эффективности $f_n(s)$.

На окончательной стадии определяется для каждого шага (от первого к последнему) безусловно оптимальная программа процесса поиска. Эта стадия никакой

трудности не представляет, так как рекомендации по оптимальной (безусловно) программе процесса поиска уже готовятся на первой стадии. Действительно, поскольку известно начальное состояние процесса s_n , то по найденному виду функции $f_n(s)$ просто найти вариант действий на первом шаге x^*_n . Этим, как правило, определяется и состояние системы после первого шага или, что то же самое, перед вторым шагом s_{n-1} . По s_{n-1} и f_{n-1} находим x^*_{n-1} , что, в свою очередь, определяет состояние s_{n-2} и т. д.

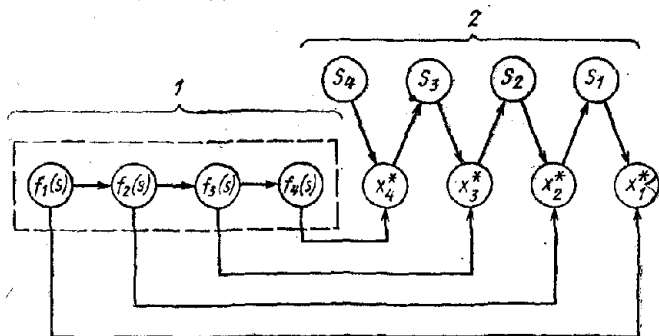


Рис. 1.7. Вычислительная процедура динамического программирования:

1 — параметрическое определение максимального значения критерия эффективности; 2 — составление оптимальной программы.

Таким образом, вычислительная процедура динамического программирования представляет собой многошаговое последовательное составление оптимальной программы процесса поиска. Эта последовательность для четырех шагов схематически изображена на рис. 1.7 и проходится дважды:

— первый раз от конца к началу, в результате чего с помощью функционального уравнения находится условно оптимальная программа на каждом шаге и максимальное значение критерия эффективности на всех шагах;

— второй раз от начала к концу, в результате чего находятся варианты действий, обеспечивающие безусловно оптимальную программу.

Пример 1.7. Район, в котором находятся затонувшие суда, состоит из четырех характерных участков. Допустим, что зависимость математического ожидания числа $M_j(m)$ обнаруженных судов в j -м

районе ($j=1, 2, 3, 4$) от числа m , выделенных на этот участок поисковых единиц, представлена в табл. 1.5.

Требуется распределить поисковые единицы по участкам так, чтобы общая эффективность поискового процесса, выраженная как сумма математических ожиданий доли обнаруженных судов на всех участках, была максимальной.

Таблица 1.5

m	$M_1(m)$	$M_2(m)$	$M_3(m)$	$M_4(m)$
0	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,600	0,400	0,500	0,300
2	1,080	0,640	0,750	0,510
3	1,464	0,784	0,875	0,657
4	1,770	0,870	0,938	0,760
5	2,016	0,922	0,969	0,832

Данный пример не относится к разряду динамических задач в смысле многошагового процесса принятия решений. Однако многошаговое свойство задачи проявляется в том, что ее можно рассматривать как динамический n -шаговый процесс, принимая за шаги последовательное определение числа поисковых единиц на первом, втором и других участках.

Обозначим через x_j число поисковых единиц, оставшихся для распределения перед шагом j , т. е. когда до конца процесса осталось j шагов. Тогда все состояния, в которых может находиться система перед шагом j , будет определяться последовательностью $\{x_j\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ для $j=1, 2, 3, 4$. Так, перед шагом 1 (до конца процесса остается один шаг, на котором поисковые единицы выделяются для поиска на первом участке) состояния системы будут определяться последовательностью $\{x_1\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда математическое ожидание числа обнаруженных судов в результате шага 1, на котором все оставшиеся поисковые единицы направляются для поиска на первый участок, будет

$$f_1(x_1) = M_1(x_1). \quad (1.68)$$

Поскольку после этого шага процесс распределения заканчивается, $f_1(x_1)$ соответствует максимальному значению математического ожидания числа обнаруженных судов для каждого значения x_1 . Другими словами, для каждого значения x_1 получено условно оптимальное число поисковых единиц, направляемых для поиска на первом участке. Это число обозначим через $x_0(x_1)$, так как оно зависит от x_0 и равно x_1 .

Математическое ожидание числа обнаруженных судов на шаге 2 (до конца процесса осталось два шага), когда из имеющихся x_2 поисковых единиц выделяются поисковые единицы для поиска на участке 2, равно $M_2(x_2 - x_1) + f_1(x_1)$. Задаваясь последовательностью $\{x_2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, можно найти максимум последнего выражения по x_1 , т. е. найти значение функции

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq x_1 \leq x_2} [M_2(x_2 - x_1) + f_1(x_1)], \quad (1.69)$$

где максимум ищется по $0 \leq x_1 \leq x_2$, так как число поисковых единиц x_2 не может быть меньше x_1 , а число x_1 не может быть отрицательным.

Число наблюдателей x_1 , для которого справедливо выражение (1.69), естественно обозначить через $x_1(x_2)$, так как оно зависит от x_2 . Очевидно, что $x_1(x_2)$ определяет условно оптимальное распределение наблюдателей на шаге 2, а $f_2(x_2)$ — максимум математического ожидания числа обнаруженных судов на шаге 2 при условии, что распределяется x_2 поисковых единиц.

Рассуждая так же, найдем максимум математического ожидания числа обнаруженных судов на шаге 3:

$$f_3(x_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq x_3} [M_3(x_3 - x_2) + f_2(x_2)], \quad (1.70)$$

которому соответствует условно оптимальное распределение поисковых единиц $x_2(x_3)$. Наконец, найдем

$$f_4(x_4) = \max_{0 \leq x_3 \leq x_4} [M_4(x_4 - x_3) + f_3(x_3)], \quad (1.71)$$

которому соответствует условно оптимальное распределение поисковых единиц на шаге 4, равное $x_3(x_4)$.

Вычислительную процедуру с помощью рекуррентных соотношений (1.68) — (1.71) целесообразно выполнять в виде таблиц. Каждая таблица для соответствующего n имеет по одной строке для каждого состояния x_j , из которого остается сделать j шагов, и по одному столбцу — для каждого состояния x_{j-1} , из которого остается сделать на шаг меньше. Числа в клетках представляют собой сумму математического ожидания числа обнаруженных судов и $f_{j-1}(x_{j-1})$. В каждой строке выбирается наибольшая из этих сумм и записывается в столбце $f_j(x_j)$, а со-

Таблица 1.6
 $n=1$

x_1	$x_0(x_1)$	$f_1(x_1)$
0	0	0
1	1	0,6
2	2	1,08
3	3	1,464
4	4	1,770
5	5	2,016

$n=2$

x_1	x_1						$x_1(x_2)$	$f_2(x_2)$
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0,400+0	0+0,6					1	0,6
2	0,640+0	0,400+0,6	0+1,8				2	1,08
3	0,784+0	0,640+0,6	0,4+1,08	0+1,464			3	1,464
4	0,870+0	0,784+0,6	0,640+1,08	0,4+1,464	0+1,770		3	1,864
5	0,922+0	0,870+0,6	0,784+1,08	0,640+1,464	0,4+1,770	0+2,016	4	2,17

 $n=3$

Таблица 1.8

x_3	x_3						$x_3(x_3)$	$f_3(x_3)$
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0,5+0	0+0,6					1	0,6
2	0,75+0	0,5+0,6	0+1,08				1	1,1
3	0,875+0	0,75+0,6	0,5+1,08	0+1,464			2	1,58
4	0,938+0	0,875+0,6	0,75+1,08	0,5+1,464	0+1,864		3	1,964
5	0,969+0	0,938+0,6	0,875+1,08	0,75+1,464	0,5+1,864	0+2,17	4	2,364

 $n=4$

Таблица 1.9

x_4	x_4						$x_4(x_4)$	$f_4(x_4)$
	0	1	2	3	4	5		
5	0,832+0	0,760+0,6	0,657+1,1	0,51+1,58	0,3+1,964	0+2,364	5	2,364

ответствующее ей условно оптимальное число поисковых единиц — в столбце $x_{j-1}(x_j)$. Пустые клетки соответствуют нарушению неравенств $0 \leq x_{j-1} \leq x_j$ и поэтому не заполняются.

Теперь, используя табл. 1.6—1.9, составим оптимальное распределение поисковых единиц по участкам.

Из табл. 1.9, которая рассчитана для начального состояния системы ($x_4=5$), находим условно оптимальное число наблюдателей $x_3(x_4)=5$, которые должны распределяться на последующих трех шагах. Это число тривиально определяет число поисковых единиц, которые должны быть выделены для поиска на четвертом участке, а именно $x_4^*=x_4-x_3(x_4)=5-5=0$. Далее, из табл. 1.8 по $x_3(x_4)=5$ находим $x_2(x_3)=4$, поэтому $x_3^*=x_3(x_4)-x_2(x_3)=5-4=1$. Затем из табл. 1.7 по $x_2(x_3)=4$ находим $x_1(x_2)=3$. Отсюда $x_2^*=x_2(x_3)-x_1(x_2)=4-3=1$.

Наконец, из табл. 1.6 по $x_1(x_2)=3$ находим $x_0(x_1)=3$. Значит, $x_1^*=3$.

Таким образом, оптимальное распределение потребовало выделить три поисковые единицы на первый участок и по одной на второй и третий участки. В этом случае будет достигаться максимум математического ожидания числа обнаруженных судов, равный 2,364 (табл. 1.9).

1.5. НОРМАТИВНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

Формальное определение и классификация теоретико-игровых моделей. Для некоторых поисковых ситуаций характерным является столкновение интересов двух сторон. Основной аспект этого столкновения заключается в том, что одна из сторон стремится к обнаружению, а другая — к уклонению от обнаружения. При этом стороны для достижения своих прямо противоположных интересов имеют наборы альтернатив, каждая из которых приводит к единственному из нескольких возможных исходов, а результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от образа действий, выбранного противником. Такие поисковые ситуации называются **конфликтными**.

Формализация содержательного описания конфликтной ситуации поиска объектов представляет собой ее математическую модель, которую называют игрой. Игра включает три основных элемента: игроков, их интересы и действия.

Игроками являются две стороны, одна из которых осуществляет поиск, а другая — уклонение от поиска.

Каждый игрок имеет набор альтернатив, выбор одной из которых в процессе игры называется ходом. Заранее определенная последовательность ходов в зависимости от информации о ходах другого игрока и случайно меняющихся параметрах поискового процесса с заданными законами распределения называется стратегией игрока. Иными словами, стратегия — это план проведения игры данным игроком. Каждая стратегия предопределяет поведение игрока во все моменты игры, когда он должен делать выбор одной из своих альтернатив. Она может быть очень плохой или очень хорошей, но для задания игры существенно описать все возможные стратегии каждого игрока.

Совокупность сделанных игроками ходов в соответствии с выбранными ими стратегиями определяет ситуацию игры, которая является моделью складывающейся поисковой ситуации в результате конкретных действий, предпринятых противоположными сторонами. Ситуация, на основании которой определяется исход игры, называется заключительной.

Описать интересы игроков можно оценкой предпочтительности ситуаций для каждого из них. Для этого каждой заключительной ситуации естественно приписать некоторые значения критерия эффективности.

Правило, по которому каждой заключительной ситуации ставится в соответствие величина критерия эффективности, называется функцией выигрыша. Это название обусловлено тем, что каждое ее значение можно представить как выигрыш, получаемый игроком в зависимости от сделанных ходов. Следовательно, функция выигрыша представляет выигрыш каждого игрока как функцию стратегий, применяемых обоими игроками. В этом смысле выигрыш является связующим звеном между множеством стратегий одного игрока и множеством стратегий другого игрока.

Таким образом, теоретико-игровая модель конфликтной ситуации поиска объектов — игра Г считается заданной, если указаны игроки, множество их стратегий и функции выигрыша для каждого игрока, определенных на множестве всех ситуаций и принимающих вещественные значения.

Игры, являющиеся математическими моделями конфликтных ситуаций поиска объектов, характерны наличием только двух игроков, преследующих прямо про-

тивоположные цели. Формально противоположность интересов игроков выражается в том, что один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой. Поэтому можно считать, что сумма выигрышей обоих игроков во всех ситуациях игры равна нулю. Отсюда эти игры называют играми с нулевой суммой или антагонистическими.

Вполне очевидно, что в антагонистической игре функция выигрыша второго игрока не нуждается в специальном задании. Поэтому антагонистическую игру в самом общем виде можно формально представить как систему следующего вида:

$$\Gamma = \langle S_1, S_2, H \rangle,$$

где S_1 и S_2 — соответственно множества стратегий игроков I и II, а H — функция выигрыша игрока I¹.

В зависимости от числа стратегий антагонистические игры подразделяются на конечные и бесконечные. Конечной игрой называется игра, при которой у каждого игрока имеется конечное число стратегий. В бесконечной игре по крайней мере один из игроков имеет бесконечное множество стратегий.

Число последовательных ходов у любого игрока определяет подразделение игр на одноходовые и многоходовые или позиционные.

Одноходовая конечная антагонистическая игра является теоретико-игровой моделью конфликтной ситуации поиска, в которой наблюдатель и объект поиска для достижения своих противоположных целей делают по одному выбору (ходу) из конечного числа альтернатив. В соответствии с выбранными способами действий (стратегиями) определяется достигаемый результат. Функции выигрыша в такой игре задаются матрицей (табл. 1.10), и поэтому эти игры называются матричными.

В матрице игры строки соответствуют стратегиям игрока, который стремится к максимизации критерия эффективности (игрок I), а столбцы — стратегиям игрока, который стремится к минимизации критерия эффективности (игрок II). Клетки матрицы, находящиеся на пересечении строк и столбцов, соответствуют ситуациям игры и заполняются числами a_{ij} — значениями критерия эффективности, характеризующего выигрыш игрока I.

¹ Следует понимать, что $(-H)$ — функция выигрыша игрока II.

		Стратегия игрока II						
Стратегия игрока I		1	2	...	j	...	n	α_i
	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	α_1
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	α_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	α_i
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	α_m
	β_j	β_1	β_2	...	β_j	...	β_n	

Обычно матрицу, имеющую m строк и n столбцов, обозначают следующим образом:

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \dots & n \\ 1 & a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Игру, описываемую матрицей A , называют « $m \times n$ -игрой», «игрой с матрицей A » или просто «игрой A ».

Развитие матричной игры, моделирующей поисковый процесс, можно представить следующим образом. Игрок I выбирает некоторую строку матрицы A , а игрок II — некоторый ее столбец, создавая ситуацию (ij) , после чего игрок I получает выигрыш a_{ij} .

Позиционная (многоходовая) игра является теоретико-игровой моделью конфликтной ситуации процесса

поиска, в которой противники (наблюдатель и объект поиска) для достижения своих целей последовательно делают по одному выбору (ходу) из конечного числа способов действий на каждом этапе развития этой ситуации.

Так, если на первом этапе сделал ход игрок II, то на втором этапе делает ход игрок I, на третьем этапе вновь игрок II и т. д.

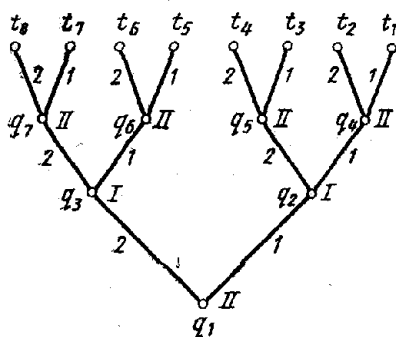


Рис. 1.8. «Дерево игры».

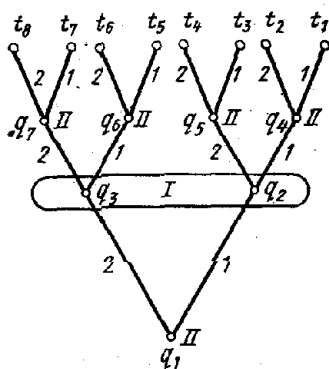


Рис. 1.9. Графическая интерпретация объема информации, используемой «игроком».

Конечную антагонистическую многоходовую (позиционную) игру наиболее просто представить графически в виде так называемого «дерева игры», т. е. плоской фигуры, состоящей из вершин и ребер. Вершины являются геометрической интерпретацией позиций, а ребра изображают способы действий, имеющиеся в распоряжении игроков.

На рис. 1.8 показано «дерево игры», имеющей три этапа. На первом этапе делает ход игрок II. Два ребра из начальной вершины изображают два возможных способа действий, имеющихся в распоряжении этого игрока. Выбор игроком II одного из них приводит к одной из ситуаций второго этапа. В каждой из этих ситуаций делает ход игрок I, что изображается двумя ребрами, идущими из каждой вершины второго уровня. На третьем этапе ход игрока II приводит к одной из заключительных ситуаций, внутри которых указаны значения функции выигрыша.

Для графической интерпретации объема информации, используемой игроком для выбора очередного хода, объединяют замкнутой линией те вершины дерева, которые он не может различить на данном этапе. Например, вершины на третьем этапе, на котором очередной ход делает игрок II, не объединены замкнутой линией (рис. 1.9). Это значит, что игрок II в этот момент знает ход, сделанный на втором этапе игроком I. Если бы он этого не знал, то следовало бы объединить замкнутой линией неразличимые вершины дерева.

Совокупность вершин, попавших внутрь фигуры, ограниченной замкнутой линией, называется информационным множеством. Очевидно, если моделью конфликтной ситуации поиска является игра с полной информацией, то каждое информационное множество состоит из одной вершины. В противном случае хотя бы одно информационное множество состоит не менее, чем из двух вершин.

Обычно участники поискового процесса (наблюдатель и объект поиска) принимают свои решения по мере его развития. Однако можно абстрагироваться от такого практического ограничения и предполагать, что до начала игры каждый игрок выбрал соответствующие способы действий на каждом этапе, т. е. запланировал свои действия, учитывая все возможные обстоятельства. Такой план игры называется чистой стратегией игрока. Таким образом, чистая стратегия в позиционной игре представляет полный набор указаний о выборе способа действий на данном этапе при любом состоянии информации о сделанных ходах на всех предыдущих этапах. Формально это функция, определенная на совокупности информационных множеств игрока и приписывающая информационному множеству числа из интервала $[1, K]$, где K — число ходов в данном информационном множестве. Поэтому, если у игрока имеется r информационных множеств и в каждом из них $K_l (l=1, 2, \dots, r)$ ходов, то общее число чистых стратегий у игрока будет $K_1 K_2 \dots$

$$\dots, K_r = \prod_{l=1}^r K_l.$$

Выбор каждым игроком одной из своих стратегий (при отсутствии случайных ходов) однозначно определяет исход игры, т. е. приводит к t -й заключительной вершине дерева, в которой игрок I получает выигрыш

$M(t)$. Этот выигрыш называется выигрышем игрока I при данной паре чистых стратегий. Если в игре есть случайные ходы (а их результаты известны только в вероятностном смысле), то пара чистых стратегий игроков I и II определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций и за выигрыш игрока I естественно принять математическое ожидание выигрыша — этим на множестве пар чистых стратегий задается функция, которая определяет выигрыш или математическое ожидание выигрыша 1-го игрока.

Поскольку в конечной позиционной игре число пар чистых стратегий игроков конечно, функцию выигрыша игрока I можно записать в виде некоторой прямоугольной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ с числом строк, равным числу m чистых стратегий игрока I, и с числом столбцов, равным числу n чистых стратегий игрока II. Если игрок I выбирает i -ю чистую стратегию, а игрок II j -ю чистую стратегию, выигрыш игрока I представляется элементом a_{ij} этой матрицы. При таком представлении, называемом нормальной ячейкой позиционной игры, анализ ее сводится к анализу матричной игры. Однако получающаяся матричная игра, как правило, имеет матрицу выигрышей большого размера.

Развитие конфликтной ситуации поиска объектов иногда принимает форму некоторой последовательности чередующихся действий наблюдателя и объекта поиска, которая делится на ряд характерных циклов. Общая схема цикла, как правило, включает выбор способа поиска из конечного множества действий наблюдателя, затем выбор способа уклонения объектом поиска (который, разумеется, не знает предыдущего выбора наблюдателя), далее реализацию некоторого случайного события или случайной величины, после чего оба противника получают информацию о выбранных способах и их результатах. На этом цикл заканчивается и действия сторон в зависимости от его исхода могут прекратиться или образовать следующий цикл.

Математическими моделями таких ситуаций являются многошаговые игры. Каждый шаг такой игры включает ход игрока I, затем ход игрока II, далее производится случайный ход, после чего оба игрока получают полную информацию о сделанных ходах и их результатах, т. е. на каждом шаге разыгрывается матричная игра, которая, в свою очередь, рассматривается как еди-

ничная игра-компонент («игровой элемент» или «игровая позиция»). Число таких шагов, конечное или бесконечное, может быть фиксировано или не фиксировано заранее, но обычно длительность партии определяется реализацией некоторого случайного события и действительной последовательностью выборов игроков. Следовательно, в самом общем виде структура многошаговой игры представляет последовательно составные, т. е. повторяющиеся во времени игры, приводящие к общей игре с нулевой суммой.

В практике поисковых действий весьма часто встречаются конфликтные ситуации, содержание которых составляет преследование объекта поиска наблюдателем. При этом наблюдатель выбирает параметры маневра перехвата для сближения вплотную или на заданное расстояние в кратчайший срок, а объект поиска стремится избежать или по крайней мере максимально увеличить время до момента перехвата.

Математическими моделями ситуаций преследования являются дифференциальные игры, название которых обусловлено использованием для их описания аппарата дифференциальных уравнений. Содержание этих игр представляет ряд последовательных (дискретных или непрерывных) решений, принимаемых двумя игроками в каждый момент времени, а выбранные значения стратегий игроков входят в дифференциальные уравнения, описывающие состояние игры. Обычно первый игрок (преследователь) обозначается P , а второй (преследуемый) — E .

Принцип оптимальности в теоретико-игровых моделях процесса поиска объектов. В теоретико-игровой модели целью игрока I является достижение максимального значения функции выигрыша, целью игрока II — минимального.

Для осуществления такой ситуации в ней должны достигаться приемлемые результаты как для игрока I, так и для игрока II. Ситуации, обладающие этим свойством, называются ситуациями равновесия. Именно они могут складываться в результате разумного выбора игроками своих стратегий. При выявлении ситуации равновесия необходимо проанализировать каждую стратегию игрока I с точки зрения наиболее неблагоприятного для него исхода при выборе игроком II одной из своих стратегий. Для этого в i -й строке матрицы (см.

табл. 1.10) отыскивается минимальное значение выигрыша. Обозначим его $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, где знаком $\min_j$ обозначена операция отыскания минимального значения функций выигрыша при всех возможных.

Числа α_i , которые записаны рядом с матрицей $\|a_{ij}\|$ в виде добавочного столбца, характеризуют минимальные выигрыши игрока I с учетом разумных действий игрока II. Поэтому игрок I должен выбрать свою стратегию так, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, т. е. он должен остановиться на той стратегии, для которой число α_i является максимальным. Обозначим максимальное значение α_i через α^* , тогда

$$\alpha^* = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α^* называется нижним значением игры, или максимином, а соответствующая ей стратегия игрока I — максиминной стратегией. Очевидно, что при выборе наиболее осторожной максиминной стратегии игрок I обеспечивает себе (независимо от поведения игрока II) гарантированный выигрыш не менее α^* .

Рассуждая аналогично, можно прийти к понятию максимального проигрыша $\beta_j = \max_i a_{ij}$ для игрока II при j -й стратегии игрока I и минимизировать его максимальный проигрыш, выразив его следующим образом: $\beta^* = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$. Величина β^* называется верхним значением

игры, или минимаксом, а соответствующая ей стратегия игрока II — минимаксной стратегией. Очевидно, что при выборе наиболее осторожной минимаксной стратегии игрок II не дает возможности при любых обстоятельствах игроку I выиграть больше, чем β^* .

Следовательно, если оба игрока ведут себя разумно, то выигрыш игрока I должен быть не меньше, чем максимин, и не больше, чем минимакс, т. е.

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}. \quad (1.72)$$

В некоторых играх выражение (1.72) превращается в равенство, необходимым и достаточным условием выполнения которого является существование седловой точки матрицы, т. е. существование пары целых чисел i_0 и j_0 , для которых a_{i_0, j_0} оказывается одновременно минимумом своей строки и максимумом своего столбца.

Поэтому игрок I, применяя максиминную стратегию i_0 , гарантирует себе выигрыш $a_{i_0 i_0}$, а игрок II, применяя минимаксную стратегию j_0 , не даст ему выиграть больше, чем $a_{i_0 j_0}$. Такие стратегии называют оптимальными, а гарантированный выигрыш $a_{i_0 j_0}$ игрока I — значением игры и обозначают его через V .

Совокупность оптимальных стратегий называется решением игры, а принцип оптимальности, лежащий в основе выбора этих стратегий, — принципом минимакса. В соответствии с этим принципом каждая стратегия оценивается по наихудшему для нее исходу и оптимальной является стратегия, приводящая к наилучшему из наихудших результатов.

Для матриц без седловых точек принцип минимакса реализуется посредством применения смешанных стратегий. Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии. Поэтому смешанную стратегию представляют в виде вектора

$$x = (x_1, \dots, x_m); \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad (1.73)$$

где $x_i (i=1, \dots, m)$ — вероятность выбора игроком I i -й чистой стратегии; $y_j (j=1, \dots, n)$ — вероятность выбора игроком II j -й чистой стратегии.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

и каждая чистая стратегия является смешанной стратегией, в которой все стратегии, кроме одной, имеют вероятности, равные нулю, а данная стратегия — вероятность, равную единице.

В результате применения смешанных стратегий каждая ситуация (i, j) реализуется с вероятностью $x_i y_j$, а поскольку в этой ситуации игрок I получает выигрыш a_{ij} , то математическое ожидание выигрыша будет равно

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Это число принимается за выигрыш игрока I при условии применения смешанных стратегий и обозначается через $H(x, y)$.

Для матричных игр справедливо равенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x, y), \quad (1.74)$$

из которого следует, что игрок I имеет хотя бы одну смешанную стратегию x^* , а игрок II — смешанную стратегию y^* , такие что

$$H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*) \leq H(x^*, y); \quad (1.75)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* y_j^* = V. \quad (1.76)$$

Смешанные стратегии x^* и y^* называют оптимальными, а V — значением игры.

Применение игроком I оптимальной стратегии x^* гарантирует ему математическое ожидание выигрыша не менее V , независимо от выбора стратегии игроком II. В свою очередь, применение игроком II оптимальной стратегии y^* гарантирует ему проигрыш не более V , независимо от выбора стратегии игроком I. Поэтому ни один из игроков, имея информацию об оптимальной стратегии противника, не может использовать эти дополнительные сведения в своих интересах. Более того, при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Вычислительные процедуры для определения оптимальных стратегий в матричных играх. Решение 2×2 -игры. В этом случае прежде всего проверяется наличие седловой точки.

Для этого вычисляются минимаксы $\max_i \min_j a_{ij}$ и $\min_j \max_i a_{ij}$. В случае их равенства седловая точка существует, а чистые стратегии i_0 и j_0 , при которых это достигается, являются оптимальными. Значение игры равно минимаксу. Если минимаксы различны, то оптимальные стратегии игроков и значение игры вычисляются по следующим формулам:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad (1.77)$$

$$x_2^* = 1 - x_1^*; \quad (1.78)$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad (1.79)$$

$$y^*_2 = 1 - y^*_1 \quad (1.80)$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \quad (1.81)$$

Решение игр $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$. Пусть дана игра (2×3) , матрица которой не имеет седловой точки.

Уменьшенная матрица игры (2×3)

	1	2
1	a_{11}	a_{12}
2	a_{21}	a_{22}

Проведем в декартовой системе координат (рис. 1.10) прямые

$$H(x, 1) = a_{21} - (a_{21} - a_{11})x_1,$$

$$H(x, 2) = a_{22} - (a_{22} - a_{12})x_1,$$

$$H(x, 3) = a_{23} - (a_{23} - a_{13})x_1.$$

Точка M , в которой ломаная B_1MNB_3 достигает максимума, определяет оптимальную стратегию игрока I и значение игры. Активными¹ стратегиями игрока II

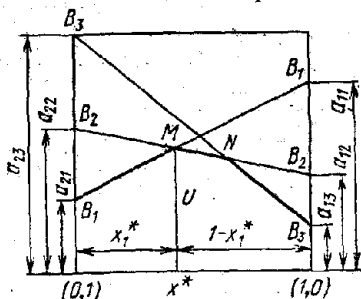


Рис. 1.10. Геометрическая интерпретация игры 2×3 .

являются те, которые пересекаются в точке M . Для рис. 1.10 в точке M пересекаются прямые, соответствующие второй и первой стратегиям игрока II. Отсюда $y^*_3 = 0$. Следовательно, оптимальную стратегию игрока II можно найти при помощи уменьшенной матрицы, используя формулы (1.79) — (1.80).

¹ Активными стратегиями называются чистые стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля.

Первый игрок, как обычно, стремится максимизировать значение игры (или, что то же самое, минимизировать величину $V=1/V$). Значит, он стремится минимизировать линейную форму $\Phi=V=x'_1+x'_2+\dots+x'_m$.

Таким образом, теоретико-игровая задача сведена к поиску значений x'_i , удовлетворяющих системе неравенств (1.83), и таких, при которых линейная форма Φ обращается в минимум. Последнее — классическая постановка задачи линейного программирования, и для ее решения используется симплексный метод, рассмотренный в § 1.4.

Теоретико-игровая модель сближения наблюдателя с уклоняющимся объектом поиска на дальность действия средств обнаружения в кратчайший срок. Традиционно задача сближения вплотную или на заданное расстояние (см. § 3.2) решается с учетом того, что известно взаимное положение наблюдателя и объекта поиска в начальный момент времени, а элементы движения объекта заданы и являются постоянными. Однако часто складываются конфликтные ситуации, в которых объект поиска движется, уклоняясь от обнаружения. Математической моделью такой конфликтной ситуации является антагонистическая дифференциальная игра, которую можно построить и решить для различных условий сближения.

Пусть две точки, наблюдатель P и объект поиска E , обладая постоянными линейными скоростями W_P и W_E ($W_P > W_E$), перемещаются (на плоскости), имея возможность в любой момент изменить направление своего движения. Наблюдатель стремится сблизиться вплотную или на минимальное расстояние с объектом, а последний — по возможности увеличить время сближения или достичь максимально возможного удаления от наблюдателя в момент окончания маневра. Изменение скорости каждого игрока при этом осуществляется при помощи так называемой позиционной переменной.

Рассмотрим игру, являющуюся моделью такого сближения в некоторой выпуклой области $S \in R^2$, когда наблюдатель P имеет информацию о времени, прошедшем с момента маневра, своем местоположении, местоположении объекта поиска E и скорости E в любой момент времени, а объект поиска E имеет аналогичную информацию за исключением информации о скорости наблюдателя P . Подобная несимметрия информации возможна

в случае, когда наблюдатель P имеет возможность немедленно определять направление скорости объекта E , а E такой возможностью не обладает. Если оба игрока не могут немедленно определять скорости противника, то наблюдатель может преднамеренно запаздывать с выбором своей скорости на некоторый промежуток времени δ . В результате он получает через время δ полную информацию о всех элементах обстановки, включая и выбранное направление движения уклоняющегося объекта поиска (предполагается, что промежуток времени δ обеспечивает определение направления движения E). Следовательно, эта дифференциальная игра представляет собой предельный случай при $\delta \rightarrow 0$ дискретной игры преследования с полной информацией, в которой игроки через время δ ходят поочередно и первый ход принадлежит объекту поиска.

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом.

Местоположения игроков P и E однозначно определяются векторами $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ соответственно, а скорости W_P и W_E — векторами $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ и $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, где $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = W_P^2$ и $\psi_1^2 + \psi_2^2 = W_E^2$. Игрок P имеет информацию о времени t , прошедшем с момента начала игры, своем местоположении и об отрезке траектории $[y(t), y(t+\delta)]$ игрока E , где $y(t)$ — местоположение игрока E в момент времени t , а $\delta > 0$ — некоторое произвольное, но фиксированное число. В свою очередь, игрок E имеет информацию о своем местоположении, местоположении игрока P и времени, прошедшем с момента начала игры.

Определим функцию выигрыша игрока P следующим образом:

$$K(\xi_0, \eta_0, \varphi, \psi) = \begin{cases} +1, & \text{если } P \text{ сближается с } E \\ & \text{вплотную или на границе} \\ & \text{области } S; \\ -1, & \text{если } E \text{ достигает грани-} \\ & \text{цы области } S \text{ до сближе-} \\ & \text{ния с ним } P \text{ вплотную;} \\ 0, & \text{если } P \text{ не имеет возмож-} \\ & \text{ности сблизиться с } E \\ & \text{вплотную за конечное} \\ & \text{время,} \end{cases}$$

где ξ_0, η_0 — начальные позиции игроков.

Будем называть Π -стратегией игрока P такую стратегию φ^Π , которая каждой паре позиций (местоположений) x, y и управлению ψ игрока E ставит в соответствие управление φ , гарантирующее сближение вплотную с E из позиции x за минимальное время при условии, что E будет в течение всей игры придерживаться постоянного управления ψ .

Как показано в [27], оптимальной стратегией игрока P будет такое направление его скорости, для которого выполняются следующие условия:

а) отрезок прямой, соединяющей точки $y(t)$, $x(t)$, параллелен отрезку прямой, соединяющей точки $y(t_1)$, $x(t)$, при всех $t \in [t_1, t_2]$;

б) расстояние $\rho[x(t), y(t)]$ между точками $x(t)$ и $y(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$ является строго убывающей функцией до момента t_0 , при котором $\rho[x(t_0), y(t_0)] = 0$.

Практическая реализация такого сближения, которое называется параллельным, состоит в выборе наблюдателем через промежутки времени δ такого направления вектора своей скорости, при котором в течение этого промежутка сохранялось бы постоянство пеленга. Для этого курсовой угол $q_P(t)$ преследователя в момент t должен быть равен следующей величине: $q_P(t) = \arcsin W_E/W_P \sin q_E(t-\delta)$, где $q_E(t-\delta)$ — курсовой угол объекта поиска в момент времени $(t-\delta)$.

Оптимальная стратегия игрока E определяется из равенства

$$K(\xi_0, \eta_0, \varphi^\Pi, \psi) = \min_{\psi \in E_0} K(\xi_0, \eta_0, \varphi^\Pi, \psi),$$

где E_0 — множество стратегий игрока E , при которых он движется по прямой.

Заметим, что если $q_E(t-\delta) = 180^\circ$, то $q_P(t) = 0$. Это соответствует ситуации равновесия, в которой оба игрока перемещаются по прямой, проходящей через точки x, y .

Рассмотрим теперь случай, когда сближение считается законченным, как только расстояние между P и E станет меньшим l ($l > 0$). Число l называют радиусом захвата, а такую ситуацию l — захватом. Целью E является достижение границы множества S до сближения с P на расстояние l , а целью игрока — сближение с E на расстояние l внутри или на границе области S . Поэтому

функцию выигрыша игрока P можно определить следующим образом:

$$K(\xi, \eta, \varphi, \psi) = \begin{cases} +1, & \text{если } P \text{ сблизится с } E \text{ на расстояние } l \text{ внутри или на границе области } S; \\ -1, & \text{если } E \text{ достигает области } S \text{ до сближения с ним } P \text{ на расстояние } l; \\ 0, & \text{если не имеет возможности сблизиться с } E \text{ на расстояние } l \text{ за конечное время на всей плоскости } R^2. \end{cases}$$

В этом случае Π -стратегия φ^Π игрока P определяется аналогично тому, как это было сделано выше, с той лишь разницей, что мы рассматриваем сближение не вплотную, а лишь на расстоянии l . Очевидно, что стратегия φ^Π при $l=0$ совпадает со стратегией параллельного сближения.

Изменим систему координат так, чтобы наблюдатель имел координаты $(0, 0)$, а объект поиска — координаты $(a, 0)$, $a > l$. Не умаляя общности, будем также считать, что $W_P = 1$, а $W_E = \alpha$ и $\alpha < 1$.

Пусть D — подмножество, параметрически задаваемое уравнениями¹

$$x^2 + y^2 = (t+l)^2; \quad (x-a)^2 + y^2 = (\alpha t)^2, \quad t \geq 0. \quad (1.84)$$

Тогда, как показано в [28], при наличии точки множества D , лежащей вне множества S , значение игры равно -1 ; оптимальной стратегией игрока E является прямолинейное движение к этой точке, а оптимальной стратегией игрока P является стратегия φ^Π (рис. 1.12). Иными словами, существует такая стратегия ψ^* , при которой в ситуации (φ, ψ^*) игрок P осуществляет l -захват из начальной позиции x_0 наискорейшим образом, но точка «встречи» с E в момент захвата l не принадлежит S .

¹ Уравнения (1.84) задают линию пересечения поверхностей двух круговых конусов с параллельными осями, которая проектируется на плоскость xy , перпендикулярную к этим осям, в овал Декарта. Доказывается, что кривая (1.84) при $\alpha < 1$, $a > l$ и $t > 0$ является замкнутой, ограниченной и выпуклой [28].

Следовательно, если хотя бы одна точка множества D лежит вне множества S , а игрок E придерживается своей оптимальной стратегии ψ^* (таких стратегий может существовать много), то l -захват игрока E невозможен ни при каких стратегиях наблюдателя.

Когда $D \subset S$, l -захват игрока E в S всегда возможен при условии, что игрок P применяет стратегию $\bar{\varphi}$. В этом случае стратегия $\bar{\varphi}$ оказывается для P оптимальной, а для игрока E оптимальной является любая стратегия.

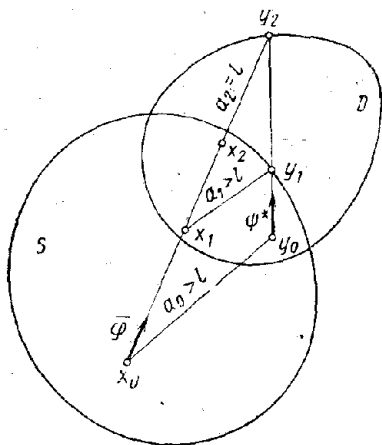


Рис. 1.12. К определению функции выигрыша игрока P .

Практическая реализация оптимальных стратегий заключается в следующем. Определяется область S и подмножество D . Затем в зависимости от взаимного положения S и D выбирается оптимальное движение объекта поиска E . Пусть E целесообразно движется курсом ψ^* (рис. 1.13). Рассчитаем величину $\mu = (W_E/W_P)l$ и отложим ее от места E в момент t в направлении, противоположном направлению его движения. В результате

получим точку F_t . Найдем курс наблюдателя для сближения с точкой F_t вплотную. В точке пересечения найденной таким образом линии курса $\bar{\varphi}$ с линией курса ψ^* будет место E в момент l -захвата, т. е. при сближении с P на расстояние l .

Пример 1.8. Пусть наблюдатель находится в точке $(0, 0)$, объект поиска — в точке $(2, 0)$, $W_P=1$, $W_E=a$, $a < 1$, $l=1$, $a=2$, а область S ограничена, как показано на рис. 1.13. Тогда система уравнений (1.84) для принятых условий будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= (t+1)^2, \\ (x-2)^2 + y^2 &= 1/4 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Решив систему (1.85), найдем

$$x = \frac{3t^2/4 + 2t + 5}{4};$$

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

2.1. ОБЪЕКТЫ ПОИСКА. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Информацию об объекте поиска наблюдатель получает в виде сигнала на индикаторе средства обнаружения. Источником сигнала являются электромагнитные или акустические колебания, параметры которых связаны с наблюдаемым объектом.

Для активных средств обнаружения (радиолокатор, гидролокатор) сигналом обнаружения объекта являются отраженные объектом электромагнитные или акустические колебания, а для пассивных средств обнаружения — колебания, излучаемые объектом.

Объекты поиска классифицируются следующим образом:

а) по виду среды, в которой выполняется поиск, — наземные, воздушные, надводные, космические и т. д.;

б) по степени подвижности — неподвижные и подвижные.

Подвижные объекты, в свою очередь, делятся на быстроходные (скоростные) и тихоходные. Деление подвижных по скорости движения объектов является относительным и зависит от качества поисковых сил и условий ведения поиска;

в) по виду поля, в котором расположен объект, — радиолокационные, гидроакустические, акустические, тепловые и т. д.;

г) по интенсивности сигнала, излучаемого объектом поиска, — крупные, средние, малые и очень малые (точечные). Такое деление является относительным и зависит от свойств средства обнаружения и условий выполнения поиска;

д) в зависимости от количества единиц, имеющих одинаковые параметры движения и составляющих единый объект поиска — одиночные и групповые.

Свойства объектов поиска необходимо рассматривать применительно к конкретным средствам обнаружения с учетом их специфики и условий работы. Наибольший практический интерес представляют радиолокационные

(наземные, надводные, воздушные) и гидролокационные надводные и подводные объекты поиска.

Характеристика радиолокационных объектов поиска. Основной характеристикой радиолокационных объектов поиска является показатель их отражательной способности, от которой зависит дальность обнаружения объекта радиолокационной станцией.

Отражательная способность объекта зависит от длины волны радиолокатора, направления излучения, конфигурации и размеров объекта, а также материалов, из которых он изготовлен. Поскольку точный и строгий учет перечисленных факторов практически невозможен,

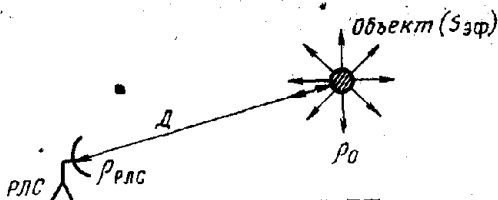


Рис. 2.1. К расчету эффективной отражающей площади объекта поиска.

появилась необходимость ввести специальную расчетную величину для измерения отражательных свойств радиолокационных объектов — эффективную отражающую площадь $S_{эф}$. Эффективная отражающая площадь объекта поиска — это такая поверхность площадью $S_{эф}$, лежащая на сфере радиуса D , равного расстоянию до объекта, которая, будучи помещенной в точку нахождения объекта, создает в точке приема такую же плотность потока мощности отраженного сигнала, как и реальный объект.

Принципиально эффективную отражающую площадь объекта можно вычислить следующим образом (рис. 2.1). Пусть радиолокатор создает у реального объекта, находящегося на расстоянии D , плотность потока ρ_0 , энергия которого частично поглощается объектом, а частично переизлучается в пространство. Поскольку переизлучение от реального объекта происходит, как правило, неравномерно по различным направлениям, в расчет введем некоторую фиктивную поверхность площадью $S_{эф}$, которая переизлучает всю падающую на нее электромаг-

нитную энергию во все стороны с одинаковой интенсивностью. При этом величина $S_{эф}$ выбирается таким образом, чтобы в точке приема радиолокационной станцией была создана такая же плотность потока мощности, как и от реального объекта. В этих условиях объект с эффективной отражающей площадью $S_{эф}$ будет воспринимать поток мощностью P_0 , равной

$$P_0 = \rho_0 S_{эф}, \quad (2.1)$$

где ρ_0 — плотность потока объекта поиска.

При этом, очевидно, у антенны радиолокационной станции будет создана плотность потока $\rho_{РЛС}$, равная

$$\rho_{РЛС} = P_0 / 4\pi D^2. \quad (2.2)$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует:

$$S_{эф} = P_0 / \rho_0 = (\rho_{РЛС} / \rho_0) 4\pi D^2 \quad (2.3)$$

или, учитывая, что мощность потока излучения пропорциональна квадрату напряженности электромагнитного поля,

$$S_{эф} = (\varepsilon_{РЛС}^2 / \varepsilon_0^2) 4\pi D^2, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_{РЛС}$ и ε_0 — напряженности поля вблизи РЛС и вблизи объекта соответственно.

Эффективная отражающая площадь реального объекта является случайной величиной. Основными причинами случайных отклонений в значениях этой величины являются:

— неравномерная диаграмма персизлучения объекта из-за его сложной конфигурации и неоднородности материала;

— случайное, а также регулярное изменение ракурса облучения объекта радиолокационной станцией, связанное с относительным перемещением объекта по траектории в зоне обзора станции, а также разворотом объекта.

Аналитический расчет эффективной отражающей площади возможен лишь для элементарных объектов простейшей формы, выполненных из однородных идеально отражающих материалов. Например, для металлического листа, шара, уголкового отражателя, полуволнового вибратора и т. п. Поскольку большинство реальных объектов не являются элементарными, их эффективная

отражающая площадь рассчитывается экспериментально.

Принято считать, что закон распределения эффективной отражающей площади объекта имеет вид [16]

$$W(S_{эф}) = \frac{1}{S_{эф0}} \exp\left(-\frac{S_{эф}}{S_{эф0}}\right), \quad (2.5)$$

где $S_{эф0}$ — среднее ожидаемое значение эффективной отражающей площади.

Вероятность того, что случайная величина $S_{эф}$ не меньше выбранной расчетной величины $S_{эфр}$, определяется по интегральному закону:

$$P(S_{эф} \geq S_{эфр}) = \int_{S_{эфр}}^{\infty} W(S_{эф}) dS_{эф} = \exp\left(-\frac{S_{эфр}}{S_{эф0}}\right). \quad (2.6)$$

График, характеризующий этот закон, показан на рис. 2.2; характер его сохраняется для различных объектов и разных типов радиолокационных станций. Из рисунка следует, что среднему значению эффективной отражающей площади ($S_{эф} = S_{эф0}$) соответствует вероятность

$$P(S_{эф} \geq S_{эф0}) = 0,37, \quad (2.7)$$

которая широко используется при расчетах дальности действия радиолокационных станций.

Ориентировочные значения среднее ожидаемой эффективной отражающей площади различных объектов приведены в табл. 2.1 [16].

Описанный порядок расчета эффективной отражающей площади относится к так называемым точечным объектам, т. е. таким, линейные и угловые размеры которых значительно меньше разрешающей способности радиолокационной станции по дальности и угловым координатам, а разность радиальных скоростей

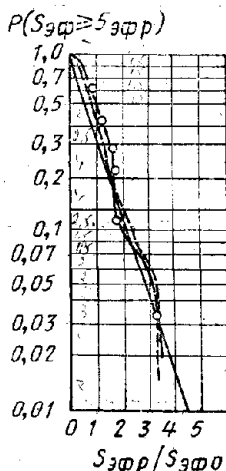


Рис. 2.2. Закон распределения эффективной отражающей площади объекта поиска.

Среднеожидаемые эффективные отражающие площади объектов, м²

Объекты	$S_{эф0}$	Объекты	$S_{эф0}$
Транспортный самолет	50	Транспорт большого тоннажа	15 000
Фронтовой бомбардировщик	7—10	Крейсер	14 000
Тяжелый бомбардировщик	15—20	Траулер	750
Истребитель	3—5	Подводная лодка в надводном положении	140
Баллистическая ракета (головная часть)	0,2	Рубка подводной лодки	1
Транспорт малого тоннажа	150	Человек	0,8
Транспорт среднего тоннажа	7000		

их крайних точек много меньше разрешающей способности по скорости. К ним можно отнести танки, автомашины, самолеты, корабли, ракеты, а также более крупные объекты, находящиеся на значительном удалении от радиолокационной станции.

Для точечных объектов характерны следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} l_0 &\ll \delta(D); & l_0 &\ll \delta(\varphi_{аз}) D; \\ l_0 &\ll \delta(\varphi_{ум}) D; & l_0 &\ll \delta(V_p) D/V, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где l_0 — наибольший размер объекта; $\delta(D)$, $\delta(\varphi_{аз})$, $\delta(\varphi_{ум})$, $\delta(V_p)$ — разрешающие способности радиолокационной станции по дальности, азимуту, углу места и относительной скорости объекта соответственно; $\delta(\varphi) D = \delta(l)$ — линейная разрешающая способность по угловой координате.

Кроме точечных различают распределенные объекты, для которых перечисленные требования относительно разрешающей способности станции (неравенства (2.8)) не выполняются. Распределенные объекты подразделяются на поверхностные (береговая черта, протяженный объект) и объемные (грозовое облако, облако пассивных отражателей и т. п.).

Применительно к распределенным объектам вводится понятие средней удельной эффективной отражающей площади $S_{\text{эф у}}$. Эта величина представляет собой эффективную отражающую площадь, отнесенную к единице площади или объема распределенного объекта. При этом полная среднеожидаемая эффективная площадь распределенного объекта находится из соотношений:

— для поверхностных объектов

$$S_{\text{эф о}} = S_{\text{эф у}} \delta(S); \quad (2.9a)$$

— для объемных объектов

$$S_{\text{эф о}} = S_{\text{эф у}} \delta(V), \quad (2.9б)$$

где $\delta(S)$ и $\delta(V)$ — размеры элементов разрешения радиолокационной станции по площади и объему соответственно.

Понятия точечного и распределенного объектов являются условными. Например, судно на больших расстояниях является точечным объектом, а на малых — распределенным. В последнем случае неравенства (2.8) перестают соблюдаться.

Характеристика гидролокационных объектов поиска. Основной характеристикой гидролокационных объектов поиска, так же как и радиолокационных, является отражательная способность объекта, которая является переменной величиной и зависит в основном от размеров и формы объекта, характера гидролокационного отражения, направления облучения, скорости объекта, рабочей частоты и длительности посылок гидролокатора. Отражательную способность объекта можно оценить по величине интенсивности отраженного эхо-сигнала гидролокатора. Однако теоретический расчет интенсивности отраженного сигнала гидролокатора удастся выполнить только для объектов простейшей формы (шара, цилиндра, тонкого диска) при условии, что длина волны гидролокатора много меньше размеров объекта, а расстояние между объектом и гидролокатором значительно больше размеров объекта.

Предполагается, что в однородной непоглощающей среде энергия акустических волн, полностью отраженных от объекта, рассеивается равномерно по всем направлениям и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому интенсивность эхо-сигнала для однородной непоглощающей среды I_0 можно выразить

через интенсивность падающей волны I_1 следующей формулой:

$$I_3 = \chi I_1 / D^2, \quad (2.10)$$

где χ — размерный коэффициент, характеризующий отражательную способность объекта; D — расстояние между объектом и гидролокатором.

Для объектов, имеющих форму шара радиусом R с площадью поперечного сечения πR^2 , энергия, падающая на объект в единицу времени, равна $I_1 \pi R^2$. Интенсивность эхо-сигнала при этом будет равна доле этой энергии, приходящейся на единицу площади сферы радиусом D .

$$I_3 = \frac{I_1 \pi R^2}{4\pi D^2} = \frac{I_1}{D^2} \frac{R^2}{4}. \quad (2.11)$$

Из сопоставления формул (2.10) и (2.11) следует:

$$\chi = R^2 / 4. \quad (2.12)$$

Интенсивность падающей волны в случае направленного излучения равна [23]

$$I_1 = P_a \gamma / 4\pi D^2, \quad (2.13)$$

где P_a — излучаемая акустическая мощность; γ — коэффициент осевой концентрации излучателя.

Из формулы (2.11) следует:

$$I_3 = (P_a \gamma / 16\pi D^4) R^2. \quad (2.14)$$

Следовательно, отражательная способность объекта, имеющего сферическую форму, прямо пропорциональна квадрату радиуса сферы — объекта. Аналогично можно установить зависимость интенсивности отраженного эхо-сигнала от диска радиусом R_d и площадью $S_d = \pi R_d^2$:

$$I_3 = P_a \gamma \gamma_d R_d^2 / 16\pi D^4, \quad (2.15)$$

где γ_d — коэффициент концентрации, характеризующий направленность эхо-сигнала от диска, при условии, что акустическая волна падает, по нормали к плоскости диска.

Коэффициент концентрации диска равен [23]

$$\gamma_d = 4\pi S_d / \lambda^2, \quad (2.16)$$

где λ — длина волны гидролокатора.

С учетом (2.16) из формулы (2.15) получим

$$I_3 = P_a \gamma \pi R_d^4 / 4 D^4 \lambda^2. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.17) следует, что отражательная способность тонкого диска в направлении, перпендикулярном его плоскости, прямо пропорциональна радиусу диска в четвертой степени, т. е. интенсивность эхо-сигнала от диска в перпендикулярном к нему направлении значительно превышает интенсивность эхо-сигнала от сферы такого же радиуса.

При наклонном падении волн направление максимума отраженного эхо-сигнала отклоняется от нормали к поверхности диска на угол α , равный углу падения волны на диск. Иными словами, отражательная способность такого диска изменяется в зависимости от изменения направления облучения.

Подобным же образом устанавливается и зависимость интенсивности эхо-сигнала от объекта, имеющего форму цилиндра конечной длины. Соответствующая формула имеет вид [21]:

$$I_{\text{э}} = P_{\text{а}} \gamma 2Rh^2 / 16\pi D^4 \lambda, \quad (2.18)$$

где R и h — радиус и длина цилиндра соответственно.

Выразить зависимость интенсивности эхо-сигнала от размеров и формы реальных объектов теоретически весьма затруднительно. Поэтому отражающая способность реальных объектов (косяков рыбы, надводных судов и т. п.) устанавливается экспериментально. При этом сложные по форме объекты для упрощения расчетов заменяют телами простейших форм, эквивалентными им по отражательной способности. В связи с этим вводится понятие эквивалентного радиуса объекта, т. е. радиуса такой зеркально отражающей сферы, которая, будучи помещенной в точку нахождения объекта, создаст в точке приема эхо-сигнал такой же амплитуды, как и сам объект.

По аналогии с формулой (2.14) можно получить выражение для интенсивности эхо-сигнала от реального объекта:

$$I_{\text{э}} = \frac{P_{\text{а}} \gamma}{16\pi D^4} R_{\text{экв}}^2 = \frac{P_{\text{а}} \gamma}{4\pi D^4} \left(\frac{R_{\text{экв}}}{2} \right)^2, \quad (2.19)$$

где $R_{\text{экв}}$ — эквивалентный радиус объекта, который выражается либо в метрах, либо в децибелах относительно сферы радиусом в 1 м.

Для выражения эквивалентного радиуса в децибелах сделаем следующее:

$$I_s [\text{дБ}] = 10 \lg I_s = 10 \lg P_a + 10 \lg \gamma + 20 \lg \frac{R_{\text{экв}}}{2} - 10 \lg 4\pi - 40 \lg D. \quad (2.20)$$

Из последнего выражения получим так называемую силу цели.

Силой цели T [дБ] называют третье слагаемое в формуле (2.20), характеризующее отражающую способность объекта через ее эквивалентный радиус:

$$T [\text{дБ}] = 20 \lg (R_{\text{экв}}/2). \quad (2.21)$$

По формуле (2.21) рассчитан график (рис. 2.3) [21], показывающий зависимость силы цели в децибелах от величины эквивалентного радиуса в метрах.

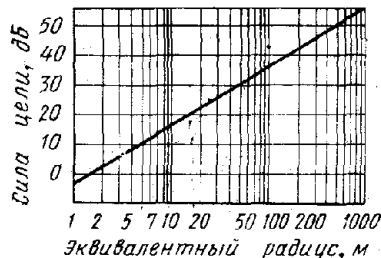


Рис. 2.3. Зависимость силы объекта поиска от величины эквивалентного радиуса.

Сила цели для реальных подводных объектов определяется экспериментально: измеряется звуковое давление эхосигнала на различных расстояниях и курсовых углах объекта. Затем по формулам, аналогичным (2.20), находят силу цели. Однако этот путь сопровождается значительными ошибками из-за неполной информации об условиях распространения акустического сигнала и его случайных флюктуаций. Единичные отклонения силы цели от своего среднего значения могут достигать в результате случайных флюктуаций 10 дБ, а иногда и 25 дБ.

Наибольшее влияние на величину силы цели оказывает направление облучения, зависящее от курсового угла объекта на работающий гидролокатор. Примерный график зависимости силы объекта — подводной лодки от ее курсового угла (по данным зарубежной литературы) приведен на рис. 2.4 [22].

Из графика следует, что сила цели для носовых курсовых углов подводной лодки в пределах 0—10° правого и левого борта составляет 12 дБ, что соответствует эквивалентному радиусу объекта 8 м,

а для траверзных курсовых углов составляет в среднем 25 дБ, что соответствует $R_{\text{эКВ}} = 30$ м.

Рассмотрим, как меняется дальность действия гидролокатора при изменении эквивалентного радиуса объекта.

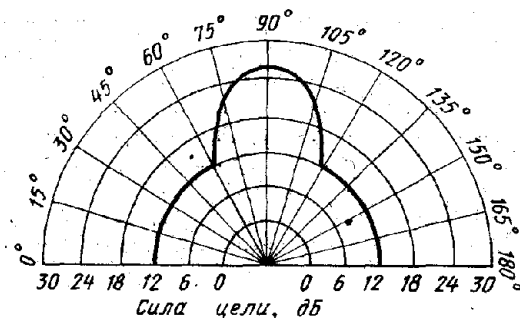


Рис. 2.4. Примерная зависимость силы объекта поиска от курсового угла.

Положим, что эквивалентному радиусу объекта $R_{\text{ЭКВ1}}$ соответствует дальность действия гидролокатора D_1 , а радиусу $R_{\text{ЭКВ2}}$ — дальность D_2 . Тогда, полагая все прочие условия, от которых зависит интенсивность эхосигнала, а также саму величину I_0 неизменными, по формуле (2.20) получим:

для $R_{\text{ЭКВ1}}$

$$I_0 [\text{дБ}] = 10 \lg P_a + 10 \lg \gamma + 20 \lg \frac{R_{\text{ЭКВ1}}}{2} - 10 \lg 4\pi - 40 \lg D_1; \quad (2.22)$$

для $R_{\text{ЭКВ2}}$

$$I_0 [\text{дБ}] = 10 \lg P_a + 10 \lg \gamma + 20 \lg \frac{R_{\text{ЭКВ2}}}{2} - 10 \lg 4\pi - 40 \lg D_2. \quad (2.23)$$

Решая совместно уравнения (2.22) и (2.23), находим значение D_2 , соответствующее эквивалентному радиусу объекта:

$$20 \lg \frac{R_{\text{ЭКВ1}}}{2} - 20 \lg \frac{R_{\text{ЭКВ2}}}{2} - 40 \lg D_1 + 40 \lg D_2 = 0;$$

откуда

$$\lg D_2 = \frac{1}{2} \lg \frac{R_{\text{ЭКВ2}}}{2} - \frac{1}{2} \lg \frac{R_{\text{ЭКВ1}}}{2} + \lg D_1;$$

$$D_2 = D_1 \sqrt{\frac{R_{\text{ЭКВ2}}}{R_{\text{ЭКВ1}}}}. \quad (2.24)$$

Формула верна для однородной, непоглощающей среды.

Пример 2.1. На траверзных курсовых углах подводного объекта эквивалентный радиус составляет $R_{\text{экв}}=30$ м, что соответствует дальности действия гидролокатора 4 км.

Необходимо рассчитать дальность действия гидролокатора на носовых курсовых углах подводного объекта при $R_{\text{экв}}=8$ м.

Решение. По формуле (2.24) $D_2=1,95$ км.

Следовательно, изменение курсового угла объектом приводит к существенному (в рассмотренном примере двукратному) уменьшению дальности действия гидролокатора наблюдателя.

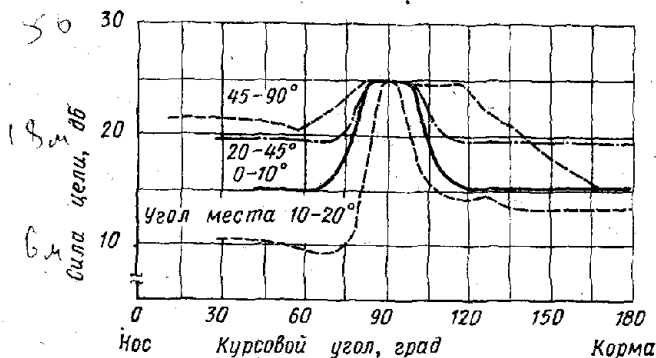


Рис. 2.5. Зависимость силы объекта поиска от угла места гидролокатора и курсового угла цели (для иностранной подводной лодки) (по данным зарубежной печати).

Экспериментальные измерения силы цели показывают ее зависимость не только от курсового угла объекта, но и от угла места гидролокатора. График силы цели подводной лодки в функциях курсового угла и угла места гидролокатора [21] приведен на рис. 2.5.

Анализ графика показывает, что с увеличением угла места более 20° сила цели на носовых и кормовых ее курсовых углах также увеличивается, а при углах места 10-20° — уменьшается. Такой характер зависимости силы цели от угла места, как показало исследование, проведенное за рубежом, объясняется главным образом конфигурацией выступающих частей подводной лодки.

Отражательные свойства подводных объектов зависят также от длительности послышки гидролокатора t . С увеличением длительности послышки сила цели возрастает. Это объясняется тем, что акустические волны, отраженные от протяженной цели, складываются в точке приема и усиливают отраженный сигнал. На рис. 2.6 приведен

график зависимости силы цели от длительности посылок гидролокатора для различных курсовых углов подводной лодки.

Анализ графика показывает, что сила цели возрастает в среднем на 10 дБ с увеличением длительности посылок от 1 до 10 мс на всех курсовых углах объекта. Такой характер изменения силы цели наблюдается на частотах гидролокаторов 24 и 60 кГц [24]. Поэтому практически можно допустить, что при работе гидролокатора на обычных частотах сила цели при изменении частоты гидролокатора не меняется.

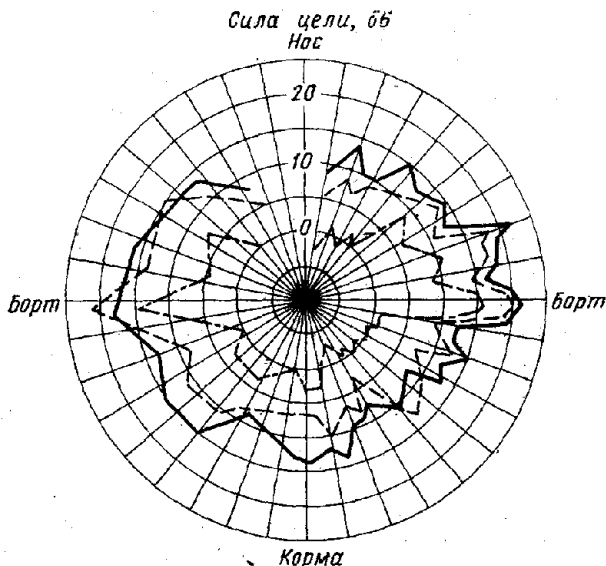


Рис. 2.6. Зависимость силы объекта поиска от длительности посылки гидролокатора и курсового угла объекта (для иностранной подводной лодки) (по данным зарубежной печати):

— 30 мс, — — — 10 мс, — · — 1 мс.

Силу цели можно существенно изменить с помощью резонансных противогидролокационных покрытий.

Отражательные свойства надводных объектов зависят от тех же факторов, что и для подводных объектов, за исключением силы цели надводных объектов, зависящей в значительно большей степени от скорости хода вследствие образования вокруг движущегося объекта пелены кавитирующих пузырьков газа и кильватерной струи, что

влияет на отражение и поглощение звуковых волн. Для подводных объектов с увеличением скорости хода образование пелены кавитирующих пузырьков газа облегчается. По результатам непосредственных измерений, произведенных за рубежом, для иностранных кораблей [23], сила цели эскадренного миноносца со стороны борта около 14—27 дБ, а со стороны носа корабля — 15—25 дБ. Для транспорта типа «Либерти» сила цели со стороны борта 20—30 дБ.

2.2. СРЕДА И УСЛОВИЯ ПОИСКА

Радиолокационный поиск

Возможность обнаружения объектов радиолокационными средствами в значительной степени определяется условиями распространения радиоволн, которые зависят от следующих факторов: ослабления энергии радиоволн в атмосфере; отражения радиоволн от земной поверхности; кривизны земной поверхности и атмосферной рефракции.

Рассмотрим влияние перечисленных факторов на распространение радиоволн в атмосфере.

Влияние ослабления энергии радиоволн в атмосфере. Электромагнитная энергия радиоволн, излучаемых и принимаемых радиолокатором, частично поглощается и рассеивается молекулами кислорода атмосферы и водяного пара, атмосферными осадками, частицами пыли и прочими неоднородностями атмосферы.

На рис. 2.7 [16] показана зависимость ослабления радиоволн в атмосфере молекулами кислорода, водяного пара и осадками от длины волны радиолокатора. Ославление энергии радиоволн на графике характеризуется коэффициентом затухания δ_n , показывающим удельное затухание радиоволн при их распространении в одном направлении.

Из графика следует, что резкое возрастание затухания радиоволн наблюдается вблизи волны длиной 0,25 и 0,5 см для кислорода и 0,18 и 1,35 см для водяного пара (кривые 1, 2). Эти пики на графике объясняются резонансным поглощением энергии вблизи соответствующих частот.

Ослабление энергии радиоволн атмосферными осадками зависит от длины волны, температуры, влажности и атмосферного давления воздуха, а также от параметров частиц, поглощающих и рассеивающих электромагнитную энергию. При малых размерах частиц (на-

пример, при тумане) в основном происходит поглощение энергии, при крупных частицах (дождь) — рассеяние. Ослабление энергии радиоволн при дожде и тумане показано кривыми 3—8. Снег и град влияют на распространение волн значительно меньше, чем дождь такой же интенсивности, и поэтому, как правило, во внимание не принимаются.

При повышении температуры от 0 до 40°C затухание радиоволн уменьшается более чем в три раза. Поглощение энергии молекулами кислорода пропорционально квадрату давления. Поглощение парами воды пропорционально влажности. Поскольку, как показывает рис. 2.7, ослабление энергии радиоволн длиной более 10 см весьма незначительно, оно для радиолокаторов дециметрового и метрового диапазона может не учитываться.

Характеризуя ослабление энергии радиоволн при прохождении через участок атмосферы длиной l (в прямом и обратном направлении) величиной δ_{π} [дБ/км], можно написать

$$10 \lg(E_c/E_{\text{сп}}) = 2l\delta_{\pi}, \quad (2.25)$$

где E_c и $E_{\text{сп}}$ — энергия сигнала на входе приемников без ослабления и с ослаблением соответственно.

Преобразуя формулу (2.25), получаем

$$E_{\text{сп}} = E_c e^{-0,468 \frac{\delta_{\pi} l}{n}}, \quad (2.26)$$

т. е. ослабление (затухание) энергии радиоволн в атмосфере носит экспоненциальный характер.

Влияние отражения радиоволн от земной поверхности. В случае использования в радиолокационных станциях антенны с широкой диаграммой направленности прямому распространению радиоволн сопутствует отра-

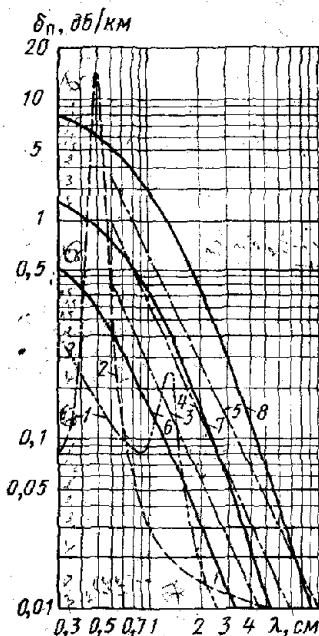


Рис. 2.7. Ослабление энергии радиоволн в атмосфере молекулами кислорода, водяного пара и осадками ($T=20^\circ\text{C}$, $P=760$ мм рт. ст.).

жение их от поверхности Земли. Наиболее простым из рассматриваемых случаев является такой, при котором земная поверхность дает идеальное отражение сигнала, угол места объекта не превышает 10° и амплитудные различия слагаемых сигнала незначительны [16].

В этих условиях амплитуда напряженности поля излучения с учетом влияния земной поверхности ϵ_3 равна

$$\epsilon_3 \approx 2\epsilon_0 \left| \sin \frac{2\pi h \varphi_{\text{ум}}}{\lambda} \right|, \quad (2.27)$$

где ϵ_0 — амплитуда напряженности поля без учета влияния земной поверхности; h — высота расположения антенны; $\varphi_{\text{ум}}$ — угол места объекта.

Из формулы (2.27) следует, что диаграмма направленности антенны из-за влияния земной поверхности приобретает лепестковый характер.

При этом максимум напряженности равен $\epsilon_{3\text{max}} = 2\epsilon_0$ и приходится на те же места, где $\left| \sin \frac{2\pi h \varphi_{\text{ум}}}{\lambda} \right| = 1$, а минимум $\epsilon_{3\text{min}} = 0$ и приходится на места, где $\left| \sin \frac{2\pi h \varphi_{\text{ум}}}{\lambda} \right| = 0$.

Как число лепестков диаграммы направленности антенны $n_{\perp}$, так и их ширина θ зависят от высоты расположения антенны и длины волны [16]:

$$n_{\perp} = [2h/\lambda]; \quad \theta^\circ = 14,3\lambda/h. \quad (2.28)$$

Коэффициент усиления с учетом отражения радиоволн от Земли G_3 можно найти из следующего соотношения:

$$G_3/G_0 = \epsilon_3^2/\epsilon_0^2, \quad (2.29)$$

где G_0 — названный коэффициент без учета влияния земной поверхности.

Из формул (2.27) и (2.29) получим

$$G_3 = G_0 (\epsilon_3^2/\epsilon_0^2) = G_0 4 \sin^2 2\pi h \varphi_{\text{ум}}/\lambda. \quad (2.30)$$

Влияние кривизны земной поверхности. Применяемые в радиолокации волны диапазона УКВ не способны огибать земную поверхность. Поэтому дальность действия радиолокатора в этом случае ограничивается так называемой дальностью прямой видимости или, как ее

иногда называют, геометрической дальностью видимости.

Дальность прямой видимости $D_{пв}$ рассчитывается по формуле, очевидной из рассмотрения рис. 2.8:

$$D_{пв} = \sqrt{(R_3 + h)^2 - R_3^2} + \sqrt{(R_3 + H)^2 - R_3^2}, \quad (2.31)$$

где $R_3 = 6370$ — радиус Земли; H — высота цели.

Поскольку $2R_3 \gg h$ и $2R_3 \gg H$, то приближенно можно написать:

$$D_{пв} \approx 113 (\sqrt{h} + \sqrt{H}) \text{ [км]}. \quad (2.32)$$

В случае обнаружения ~~высокотелящих~~ космических объектов, высота которых соизмерима с величиной радиуса Земли,

$$D_{пв} = 113 \left[\sqrt{h} + \sqrt{H \left(1 + \frac{H}{12740 \text{ [м]}} \right)} \right] \text{ [км]}. \quad (2.33)$$

Влияние атмосферной рефракции. Атмосферная рефракция радиоволн вызывается неоднородностью слоев

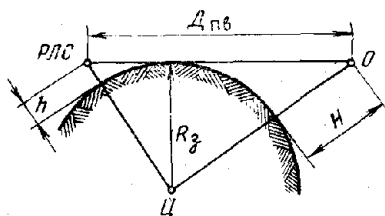


Рис. 2.8. К расчету дальности прямой видимости.

воздуха тропосферы в вертикальной плоскости. Величина рефракции n и ее характер определяются скоростью изменения коэффициента преломления радиоволн в атмосфере с изменением высоты

$$(n - 1) 10^{-6} \approx \frac{77,6}{T_0} \left(P_v + \frac{4810e}{T_0} \right), \quad (2.34)$$

где P_v — давление воздуха, мбар; e — парциальное давление водяного пара, мбар.

Нормальное значение n у поверхности Земли равно 10003. Так как с увеличением высоты барометрическое давление и содержание водяных паров уменьшаются быстрее, чем температура, величина n с высотой уменьшается и траектория радиоволн искривляется книзу, в силу чего появляется возможность обнаружения объекта за пределами геометрической дальности видимости.

Влияние рефракции удобно учитывать, заменяя в формулах прямой видимости радиус Земли на условный, так называемый эффективный радиус $R_{эф}$. При этом принимается, что радиоволны распространяются прямолинейно, т. е. атмосфера считается однородной.

Величину эффективного радиуса Земли можно найти из уравнения

$$\frac{1}{R_{эф}} = \frac{1}{R_3} + \frac{dn}{dH}. \quad (2.35)$$

В расчетах обычно пользуются следующим приближенным значением эффективного радиуса для стандартной атмосферы ($dn/dH = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$):

$$R_{эф} \approx \frac{4}{3} R_3. \quad (2.36)$$

Подставляя это значение в формулу (2.32), получаем приближенное выражение для расчета дальности прямой видимости с учетом рефракции

$$D'_{пр} \approx 130 (\sqrt{h} + \sqrt{H})^2 [\text{км}]. \quad (2.37)$$

Из сравнения формул (2.37) и (2.32) следует, что рефракция увеличивает дальность прямой видимости примерно на 15%.

Для атмосферных условий, отличающихся от стандартных, рефракция существенно меняется. При $dn/dH = -15,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$ наступает так называемая критическая рефракция, характеризующаяся убыванием температуры на 1°C при подъеме на каждые 9—10 м или изменением абсолютной влажности на 1 мбар на 30 м высоты. При критической рефракции радиоволны распространяются параллельно поверхности Земли.

При $dn/dH < -15,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$ возникает сверхрефракция — распространение радиоволн по так называемому «атмосферному волноводу», при котором они претерпевают полное внутреннее отражение от слоя атмосферы и поверхности Земли или от двух соответствующих слоев атмосферы.

Сверхрефракция значительно увеличивает дальность действия радиолокаторов по наземным и надводным объектам, позволяя их обнаруживать за границей радиолокационного горизонта. Сверхрефракция характерна для температурной инверсии, когда с увеличением высоты температура не уменьшается, а увеличивается, а также при резком уменьшении влажности с высотой. Условия температурной инверсии характерны для тро-

пиков и субтропиков в ясную и безветренную погоду, когда исключается перемешивание слоев атмосферы.

«Атмосферный волновод» обычно образуется на высоте нескольких десятков или сотен метров над поверхностью Земли. В отдельных случаях слой инверсии может образовываться и на значительной высоте — порядка тысяч метров. Это так называемый приподнятый «атмосферный волновод».

В определенных атмосферных условиях, когда величина dn/dH приобретает положительное значение, траектория радиоволн отклоняется кверху, что приводит к явлению субрефракции. Условия, благоприятные для субрефракции, возникают, например, при большом превышении температуры водной поверхности над температурой воздуха, что характерно для арктических районов. Субрефракция резко сокращает дальность радиолокационного обнаружения.

При поиске объектов в космосе необходимо считаться с влиянием на распространение радиоволн ионосферы. Оно сказывается главным образом на точности определения параметров движения объектов.

Гидроакустический поиск

Обнаружение объектов гидроакустическими средствами зависит от условий распространения звука в море, которые определяются следующими факторами: ослабление и затухание звука в воде; распределение скорости звука по глубине, обуславливающее рефракционные явления; отражение и рассеяние звуковой энергии от дна и поверхности моря; реверберация моря.

Рассмотрим влияние перечисленных факторов на условия распространения звуковых волн в море.

Ослабление и затухание звука в море. Ослабление и затухание звука в море обусловлено, во-первых, расширением фронта сферических звуковых волн с увеличением расстояния, во-вторых, поглощением и рассеянием энергии звуковых волн в воде.

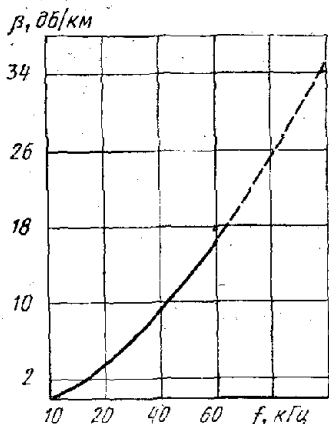
Поскольку расширение фронта сферической волновой поверхности происходит пропорционально квадрату радиуса, то и интенсивность звука в сферической волне убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Следовательно, при определении дальности действия пассивных гидроакустических средств интенсивность акустического поля объекта убывает обратно пропорцио-

нально квадрату расстояния, а при использовании активных гидроакустических средств интенсивность эхо-сигнала будет ослабляться за счет расширения фронта сферических волн обратно пропорционально расстоянию в четвертой степени.

Поглощение и рассеяние энергии звуковых волн обусловлено физико-химическими свойствами воды и наличием разных неоднородностей, главным образом газовыми пузырьками, концентрация которых особенно высока в приповерхностном слое моря толщиной 10—15 м, а также в областях зоо- и фитопланктона. Поглощение и рассеяние звуковой энергии в конечном счете приводят к превращению энергии звуковых волн в тепловую энергию.

Затухание звука в морской воде происходит по экспоненциальному закону и характеризуется коэффициентом затухания β , который показывает, как ослабевает звук при проходе им

Рис. 2.9. Зависимость коэффициента затухания звука в море от частоты.



единицы расстояния, и измеряется в децибелах на километр. Экспериментально установлено, что с увеличением частоты коэффициент затухания β резко возрастает. Эта зависимость выражается эмпирической формулой

$$\beta = 0,036f^{3/2} \text{ дБ/км}, \quad (2.38)$$

где f — частота в килогерцах.

Графическая зависимость коэффициента затухания звука β от частоты показана на рис. 2.9. Приведенные зависимости коэффициента затухания хорошо согласуются с опытом в области частот 16—60 кГц, а в области низких частот наблюдаются значительные расхождения. Поэтому проблема затухания звука в море требует дальнейшего экспериментального изучения.

Рассмотрим аналитическую зависимость ослабления и затухания звука в море применительно к пассивным и активным гидроакустическим средствам обнаружения.

Например, убывающую с расстоянием интенсивность акустического поля подводного объекта с учетом затухания звука можно определить по формуле

$$I_c = \frac{P_a - 10^{-0,1\beta D} [\text{км}]}{4\pi D^2 [\text{см}]}, \quad (2.39)$$

где P_a — общая акустическая мощность подводного объекта.

Применительно к гидролокаторам интенсивность эхосигнала с учетом ослабления и затухания звука в море можно определить по формуле

$$I_s = \frac{P_a R_{\text{экр}}^2}{16\pi D^4} 10^{-0,1\beta D} \quad (2.40)$$

Таким образом, изменение интенсивности прямого или отраженного эхосигнала с расстоянием можно охарактеризовать лишь с точностью определения коэффициента затухания.

Рефракция звуковых волн в море. Типичные гидрологические условия. В море скорость распространения звуковых волн претерпевает существенные изменения по месту и времени в зависимости от температуры, солености и статистического давления. Эта зависимость установлена экспериментально и является пропорциональной. Пределы изменения скорости звука от 1420—1520 м/с.

Установлено, что с увеличением солености и статического давления скорость звука возрастает линейно, а с увеличением температуры нелинейно. Для количественной оценки изменения скорости звука с глубиной вводится понятие градиента скорости звука. Градиент скорости звука G_c — это производная скорости звука по глубине

$$G_c = dc/dh. \quad (2.41)$$

Составляющие градиента скорости звука с глубиной определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_c(t) &= (4,21 - 0,073t) \mathcal{G}_t, \\ \mathcal{G}_c(S) &= 1,14 \mathcal{G}_s, \\ \mathcal{G}_c(P) &= 0,175 \mathcal{G}_p, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $\mathcal{G}_t$, $\mathcal{G}_s$ — градиенты температуры и солености соответственно; $\mathcal{G}_p$ — градиент статического давления, равный 0,1 атм/м (10^4 ньютон/м).

Из приведенных соотношений следует, что изменение солености на 1‰ приводит к изменению скорости звука на 1,14 м/с, а увеличение гидростатического давления на 1 атм увеличивает скорость звука на 0,018 м/с. Изменение температуры на 1° вызывает изменение скорости на 3,8 м/с при температуре 5°C и около 2,7 м/с при температуре воды 20°C.

Сопоставляя влияние температуры, солености и статического давления на скорость звука, можно видеть, что основным фактором является температура воды. Изменениями солености в районах моря, ограниченных зоной обнаружения гидроакустических средств, можно пренебречь. Влияние изменения давления значительно меньше влияния изменения температуры, и с ним также в большинстве случаев можно не считаться. Однако в глубоком море с резко меняющейся соленостью характер распределения скорости звука зависит также и от распределения солености и статического давления.

На температуру морской воды влияют солнечная радиация, теплообмен между морем и атмосферой, испарение, таяние льдов, течения и конвекционные токи воды. Так как температурным изменениям подвержены главным образом поверхностные слои воды, а теплопроводность воды невелика, в море может создаться значительная разница в температуре воды на различных глубинах.

Распределение скорости звука по глубине соответствует закономерным сезонным и суточным изменениям температуры и солености, но часто эта закономерность нарушается. Поэтому распределение скорости звука в воде может быть чрезвычайно разнообразным. Важнейшим следствием изменения скорости звука является рефракция звуковых лучей, т. е. искривление лучей, проходящих через слои с различными скоростями звука, которое существенно влияет на дальность действия гидроакустических средств обнаружения.

Из закона преломления, объясняющего явление рефракции

$$c_1/\sin \alpha_1 = c_2/\sin \alpha_2, \quad (2.43)$$

следует, что когда скорость звука в первом слое больше, чем во втором ($c_1 > c_2$), то угол $\alpha_2 > \alpha_1$ и акустический луч отклоняется в сторону второго слоя.

Рассмотрим, как явление рефракции влияет на характер распространения звука при некоторых типовых случаях вертикального распределения скорости звука с глубиной. Различают следующие типовые случаи верти-

кального распределения скорости звука: 1) уменьшается с глубиной (случай отрицательной рефракции); 2) практически не изменяется с глубиной (случай изотермии); 3) возрастает с глубиной (случай положительной рефракции); 4) вначале уменьшается с глубиной, а затем увеличивается скорость звука (случай подводного звукового канала). Рассмотрим их.

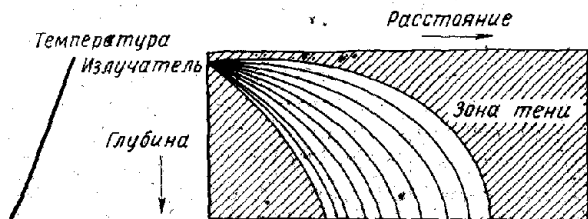


Рис. 2.10. Отрицательная рефракция.

Случай отрицательной рефракции характерен для летнего сезона, когда поверхностный слой воды интенсивно прогревается солнцем. Температура воды при этом резко уменьшается с глубиной в поверхностном слое и медленно уменьшается в глубинных слоях. Скорость звука будет следовать изменениям температуры. При таких условиях акустические лучи сильно искривляются в сторону дна. Образуются две зоны акустической тени: внутренняя и внешняя (рис. 2.10). Условия гидроакустического обнаружения подводных объектов, особенно находящихся в зоне тени, резко ухудшаются. В ряде случаев происходит резкий перепад скорости звука при небольшом изменении глубины (до 50 м). Слой наибольшего перепада скорости звука называется слоем скачка. При прохождении акустических волн через этот слой происходит значительное ослабление интенсивности звука из-за рефракции, вызывающей значительное расширение фронта акустической волны. Когда гидроакустические средства обнаружения и объект поиска находятся по разные стороны от слоя скачка, возможность обнаружения объекта резко ухудшается. Отрицательная рефракция наиболее затрудняет поиск и обнаружение подводных объектов гидроакустическими средствами.

Изотермия встречается в осенний и зимний сезоны года, когда в результате охлаждения моря происходит интенсивная вертикальная циркуляция воды, усиливаю-

щаяся под действием ветра. Изотермия обуславливает практически постоянную скорость звука по глубине. В результате этого вблизи поверхности образуется слой с постоянной скоростью звука, толщина которого может достигать нескольких десятков метров. Ниже скорость звука уменьшается (рис. 2.11). Пучок акустических лучей, выходящий из источника, расщепляется. Лучи, вышедшие из источника под малыми углами к горизонту,

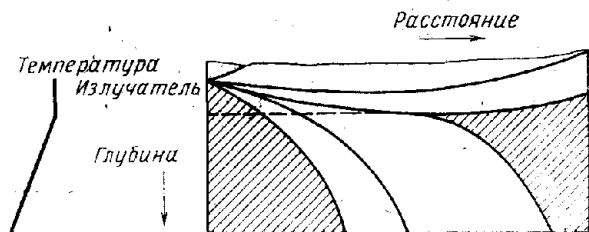


Рис. 2.11. Изотермический слой.

искривляются в сторону поверхности, а лучи, вышедшие из источника под большими углами, — в сторону слоев с меньшей скоростью звука. Между этими двумя группами лучей образуется внешняя зона акустической тени. Можно считать, что при изотермии на небольших расстояниях акустические лучи распространяются прямолинейно.

Положительная рефракция наблюдается в осенний и зимний сезоны, когда поверхность моря отдает больше тепла, чем получает, и акустические лучи отклоняются к поверхности моря. Распространение акустических волн сопровождается многократными отражениями от поверхности моря, которые происходят практически без потерь. Условия гидроакустического поиска при положительной рефракции оказываются наиболее благоприятными.

Подводный звуковой канал образуется в определенном слое, когда скорость звука сначала падает с глубиной, а затем, достигнув минимума на оси подводного звукового канала, начинает возрастать (рис. 2.12). На оси подводного звукового канала акустические волны распространяются на очень большие расстояния. Это обусловлено тем, что акустические лучи многократно претерпевают полное внутреннее отражение от границ канала и его промежуточных слоев без потерь энергии на рассеяние звука.

Такие волноводные свойства подводного звукового канала создают возможность сверхдальнего распространения звука в море. Подводный звуковой канал может существовать на малых глубинах 25—100 м в весенний и летний сезоны, когда отрицательный градиент скорости звука в верхних слоях переходит в положительный градиент в нижних слоях. Это так называемый поверхностный подводный звуковой канал. Однако практически во

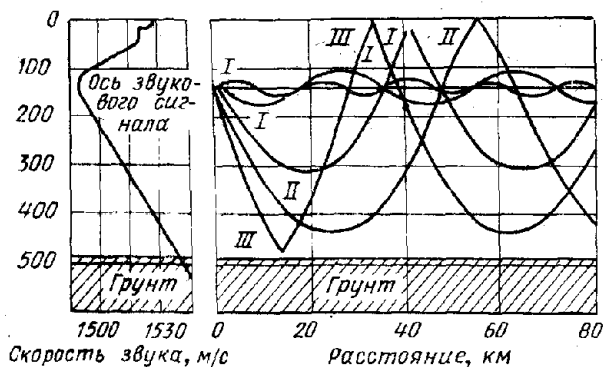


Рис. 2.12. Схема подводного звукового канала.

всех океанах есть глубоководный звуковой канал. В верхних слоях воды в результате теплообмена температура воды и вместе с ней скорость звука с увеличением глубины уменьшаются. Затем, дойдя до значения, соответствующего максимальной плотности воды, температура воды с увеличением глубины практически остается постоянной. В то же время гидростатическое давление постоянно возрастает с увеличением глубины, вызывая увеличение скорости звука. В результате совместного влияния изменения температуры воды и гидростатического давления создается распределение скорости звука, при котором возникает глубоководный подводный звуковой канал.

Учет влияния рефракции на интенсивность полезного гидроакустического сигнала как для пассивного режима (шумопеленгование), так и активного (гидролокация) производится с помощью фактора аномалии (A), под которым понимается отношение интенсивности полезного сигнала в среде при наличии рефракции (I_p) к интенсив-

ности сигнала на том же расстоянии в однородной среде (I_0):

$$A = I_p / I_0. \quad (2.44)$$

В теории гидроакустики доказывается, что фактор аномалии при известном распределении скорости звука с глубиной зависит от расстояния между объектом поиска и точкой приема, углов выхода звуковых лучей из точки нахождения объекта, а также углов между горизонтом и касательными к лучам в точке приема.

С учетом фактора аномалии интенсивность полезного гидроакустического сигнала в режиме шумопеленгования и эхо-пеленгования определяется по формулам:

— для шумопеленгования

$$I_p = P_a \gamma R_a^2 10^{-0,1\beta D} A / 4\pi D^2, \quad (2.45)$$

где R_a — характеристика направленности; β — коэффициент затухания.

— для эхо-пеленгования

$$I_{\text{э}} = P_a \gamma R_a^4 R_{\text{эв}}^2 10^{-0,2\beta D} A^2 / 16\pi D^4. \quad (2.46)$$

Приведенные формулы справедливы для глубокого моря при сильно поглощающем грунте, когда отражением звуковой энергии от дна можно пренебречь. Аналогично можно пренебречь и отражением звуковой энергии от поверхности моря. Если отражением звуковой энергии от поверхности моря и грунта пренебречь нельзя, то учет влияния поверхности моря и морского дна на распространение звука производится с помощью коэффициентов отражения. Например, при расчете величины I_p коэффициент отражения от дна учитывается следующим образом:

$$I_r = \frac{P_a \gamma 10^{-0,1\beta D}}{4\pi D} \sum_{i=1}^n A_i R_{ai}^2 K_{pi}, \quad (2.47)$$

где A_i — фактор аномалии луча, вышедшего под углом α ; R_{ai} — коэффициент направленности; n — число лучей, приходящих в данную точку наблюдения; K_p — коэффициент отражения от дна (по давлению).

Рефракция звуковых лучей в море является самым существенным фактором, влияющим на возможность обнаружения объекта гидроакустическими средствами.

Отрицательная рефракция и слой скачка скорости звука резко ограничивают дальность действия гидроакустических средств. Важно также отметить, что рефракционные ограничения носят обратимый характер для наблюдателя и объекта поиска.

Поиск объектов гидролокационными станциями сопровождается еще одним характерным явлением — **реверберацией**. Реверберацией называется послезвучание, наблюдающееся в точке расположения гидролокатора после прекращения звукового импульса. Реверберация длится от долей секунды до нескольких секунд и постепенно убывает по силе. Реверберация в море возникает в результате рассеяния звука, вызываемого различными неоднородностями морской среды, а также неровностями

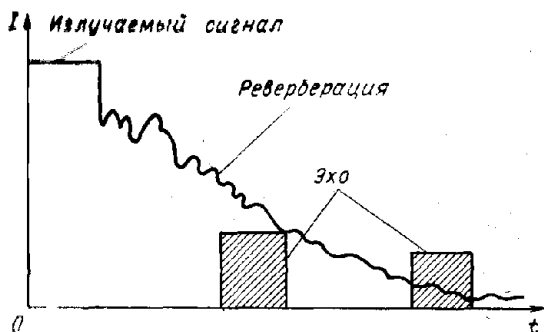


Рис. 2.13. Маскирующее действие реверберации.

дна и волнистой поверхности моря. Часть отраженной и рассеянной акустической энергии возвращается в точку излучения и прослушивается в виде непрерывного звучания постепенно ослабевающей интенсивности. Наряду с ослаблением интенсивности реверберации происходит и ее флуктуация; обусловленная интерференционными явлениями.

Реверберация ограничивает дальность действия гидролокационных станций и уменьшает возможности обнаружения объектов. Из рис. 2.13 следует, что если интенсивность реверберации к моменту приема превысит интенсивность полезного эхо-сигнала, то обнаружение полезного сигнала окажется невозможным. При увеличении расстояния до неподвижного объекта уровень интенсивности полезного эхо-сигнала повысится и обнаруже-

ние отраженного от объекта сигнала окажется возможным.

По своей природе реверберация может быть объемной, поверхностной и донной. Объемная реверберация обусловлена рассеянием акустической энергии малыми частицами (газовыми пузырьками, термическими неоднородностями, различными твердыми взвешенными частицами), находящимися в самой толще воды. Объемная реверберация начинается сразу же после окончания гидролокационного импульса и сравнительно медленно убывает с течением времени. Она характерна для глубокого и спокойного моря. Поверхностная реверберация вызывается рассеянием акустической энергии волнистой поверхностью моря и многочисленными пузырьками воздуха, находящимися в поверхностном слое воды из-за перемешивания ветром. Поверхностная реверберация убывает быстрее, чем объемная, и наблюдается при волнении; в штилевую погоду ее влиянием можно пренебречь. Донная реверберация вызвана рассеянием звука, неровностями рельефа и характером грунта дна моря. Донная реверберация убывает со временем наиболее быстро. Влияние донной реверберации наиболее заметно в мелководных районах моря при слабо поглощающем акустическую энергию грунте — каменистом или песчаном.

2.3. СРЕДСТВА ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ПОИСКА И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

Средства обнаружения — это технические устройства, предназначенные для обнаружения различных объектов и измерения их координат. Существующие средства обнаружения можно подразделить на визуальные и электронные.

К визуальным средствам обнаружения относятся все известные зрительные приборы: бинокли, стереотрубы, визиры, дальномеры, и т. п.; к электронным — радиолокационные и гидроакустические станции, инфракрасная и телевизионная аппаратура, магнитометрические средства и т. д.

Средства обнаружения решают не только задачу обнаружения объекта, но и ряд других, тесно связанных с поиском и обнаружением задач: классификацию объ-

ектов, измерение его координат и определение элементов (параметров) движения.

Основными тактическими характеристиками средств обнаружения являются: зона обнаружения, период обзора или обследования, число измеряемых координат объекта, точность измерения координат, разрешающая способность, эксплуатационная надежность и помехозащищенность.

Перечисленные характеристики определяются техническими параметрами соответствующего электронного средства обнаружения: частотой или длиной волны, характером диаграммы направленности, чувствительностью приемного устройства и т. п.

Кратко остановимся на каждой характеристике. Зона обнаружения называется область пространства, в пределах которой возможно обнаружение объекта с заданной вероятностью. Зона обнаружения ограничивается максимальной ($D_{\max}$) и минимальной ($D_{\min}$) дальностями действия станции, а также секторами обзора в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Период обзора или обследования ($T_{\text{обс}}$ — время, необходимое для осмотра заданной области).

В зависимости от числа измеряемых координат средства обнаружения разделяются на: трехкоординатные, двухкоординатные и однокоординатные. Наиболее распространенные сферическая и цилиндрическая системы координат, в которых в качестве центра принято место положения антенны.

Сферическими координатами объекта являются (рис. 2.14):

наклонная дальность (D_n) — расстояние между местом расположения антенны станции обнаружения и объектом; единицы измерения — километры, морские мили, кабельтовы;

зенит (азимут) угол (Π) между плоскостью истинного меридиана и вертикальной плоскостью, проходящей через объект; измеряется в градусах от направления истинного меридиана по часовой стрелке (от 0 до 360°);

курсовой угол наблюдателя на объект ($KУ_n$) — угол между диаметральной плоскостью наблюдателя (корабля, самолета) и направлением на объект; измеряется в градусах от направления диаметральной плоскости наблюдателя вправо и влево (от 0 до 180°) с ука-

занием соответствующего борта, либо по часовой стрелке от 0 до 360°;

— угол места объекта (Φ) — угол между горизонтальной плоскостью, проходящей через антенну станции, и направлением на объект; измеряется в градусах от горизонтальной плоскости (от 0 до 90°) вверх и вниз: направлению вверх приписывается знак плюс, вниз — минус.

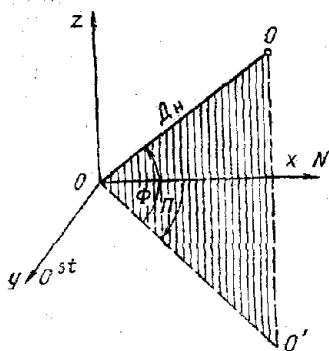


Рис. 2.14. Сферические координаты объекта поиска.

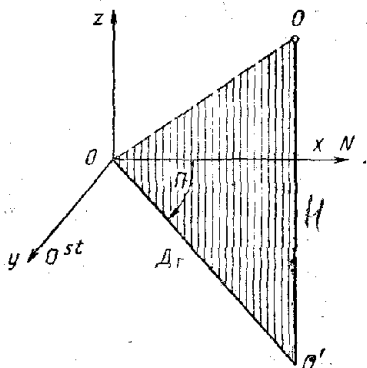


Рис. 2.15. Цилиндрические координаты объекта поиска.

Цилиндрическими координатами объекта являются (рис. 2.15):

— пеленг (азимут) или курсовой угол объекта ($\Pi(q_0)$);

— высота объекта (H) — расстояние по перпендикуляру от места объекта до горизонтальной плоскости, проходящей через антенну станции;

— угол места объекта (Φ) и горизонтальная дальность объекта (D_r).

Применительно к гидроакустическим станциям обнаружения подводных объектов сферическая система координат (рис. 2.16) включает: пеленг (азимут) или курсовой угол объекта $\Pi(q_\Pi)$; наклонную дальность до объекта D_Π и угол места объекта.

Цилиндрическая система координат применительно к подводному объекту включает (рис. 2.16): пеленг (азимут) или курсовой угол объекта $\Pi(q_\Pi)$; горизонтальную дальность объекта D_r и глубину погружения объекта H .

Точность измерения координат объекта зависит от случайных и систематических ошибок измерений. Поскольку систематические ошибки измерений, как правило, можно определить и учесть при юстировке станции, основное внимание при оценке точности обращается на случайные ошибки, которые в большинстве случаев распределены по нормальному закону и оцениваются среднеквадратическими либо средними отклонениями. Среднеквадратические ошибки измерений дальности обозначаются σ_d , угловой координаты — σ_φ , скорости цели — σ_v .

Разрешающая способность средства обнаружения характеризует возможность станции по раздельному наблюдению объектов, отличающихся значением хотя бы одной из координат или скоростью движения. Различают разрешающие способности по дальности $\delta(D)$, угловой координате $\delta(\varphi)$ и скорости объекта $\delta(V)$. Разрешающая способность по дальности — минимальное расстояние между двумя объектами, имеющими одинаковые угловые координаты и скорости движения, при которых эти объекты наблюдаются раздельно. Разрешающая способность по скорости — минимальная разность скоростей двух объектов, наблюдаемых раздельно, при условии равенства их дальностей и угловых координат.

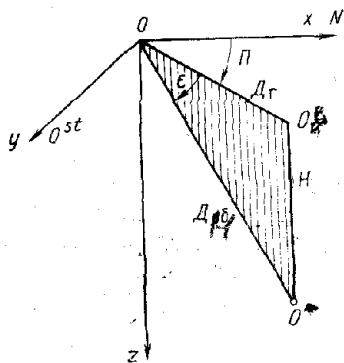


Рис. 2.16. Сферические и цилиндрические координаты применительно к подводному объекту поиска.

Эксплуатационной надежностью средства обнаружения называется способность станции нормально работать в течение определенного времени в данных технических условиях. Эксплуатационная надежность характеризуется временем непрерывной работы, а также вероятностью безотказной работы в течение заданного времени.

К тактическим характеристикам следует отнести помехозащищенность средства обнаружения. Причем более высокой помехозащищенностью обладает то средство

обнаружения, у которого при прочих равных условиях воздействие помехи в меньшей степени ухудшает дальность действия, точность измерения координат, разрешающую способность и т. д.

Важнейшей тактической характеристикой средства обнаружения, в значительной мере определяющей его поисковые возможности, является дальность обнаружения, под которой понимают наибольшее расстояние между средством и объектом поиска, на котором достигается обнаружение.

О зависимости дальности действия средств обнаружения от случайных факторов говорилось в § 1.3. В настоящем параграфе рассматривается определение дальности действия радиолокационных и гидролокационных станций для детерминированного случая, когда факторы, влияющие на обнаружение цели, заранее известны.

Дальность действия радиолокационной станции зависит от ее технических параметров, характеристик объекта поиска, условий распространения радиоволн, наличия и уровня помех, а также ряда других факторов.

Рассмотрим вначале дальность действия радиолокатора без учета ослабления радиоволн в атмосфере и влияния земной поверхности на их распространение.

Известно, что плотность потока электромагнитной энергии радиолокатора у объекта ρ_{03} равна [16]:

$$\rho_{03} = E_n G_{\text{прд}} / 4\pi D^2, \quad (2.48)$$

где E_n — энергия излучения; D — расстояние от радиолокатора до объекта; $G_{\text{прд}}$ — максимальное значение коэффициента усиления передающей антенны по мощности.

Количество энергии, переизлучаемое объектом E_o , равно

$$E_o = \rho_{03} S_{\text{эф0}} = E_n G_{\text{прд}} S_{\text{эф0}} / 4\pi D^2. \quad (2.49)$$

В свою очередь, плотность потока энергии у приемной антенны равна

$$\rho_{пз} = E_n / 4\pi D^2 = E_n G_{\text{прд}} S_{\text{эф0}} / 16\pi^2 D^4. \quad (2.50)$$

Энергия радиолокационного сигнала E_c , поступающего из антенны в согласованный с ней приемник, равна

$$E_c = \rho_{пз} S_{\text{а прм}} = E_n G_{\text{прд}} S_{\text{эф0}} S_{\text{а прм}} / 16\pi^2 D^4. \quad (2.51)$$

где $S_{\text{а прм}}$ — эффективная площадь приемной антенны, равная 0,5—0,6 геометрической площади раскрыва антенны.

Интересующая нас максимальная дальность обнаружения $D_{\max}$ соответствует пороговому значению энергии сигнала E_c , равному чувствительности приемника $E_{\text{чп}}$

$$E_c = E_{\text{чп}} = E_{\text{ч}} G_{\text{прд}} S_{\text{эфф}} S_{\text{апрм}} / 16\pi^2 D_{\max}^4, \quad (2.52)$$

откуда следует

$$D_{\max} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{ч}} G_{\text{прд}} S_{\text{эфф}} S_{\text{апрм}}}{16\pi^2 E_{\text{чп}}}}. \quad (2.53)$$

Раскроем значение чувствительности приемника:

$$E_{\text{чп}} = K_p K_{\text{ш}} kT, \quad (2.54)$$

где K_p — коэффициент различимости сигнала; $K_{\text{ш}}$ — коэффициент шума приемника; k — постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/с/град; T — абсолютная температура, при которой определяется величина $K_{\text{ш}}$ (обычно 290°K).

Подставляя значение $E_{\text{чп}}$ в (2.53), получаем

$$D_{\max} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{ч}} G_{\text{прд}} S_{\text{эфф}} S_{\text{апрм}}}{16\pi^2 K_p K_{\text{ш}} kT}}. \quad (2.55)$$

Для установления зависимости $D_{\max}$ от длины волны радиолокатора, воспользуемся известными соотношениями [16]:

$$G_{\text{прд}} = 4\pi S_{\text{а прд}} / \lambda^2, \quad (2.56)$$

где $S_{\text{а прд}}$ — эффективная площадь передающей антенны,

$$S_{\text{а прд}} = G_{\text{прм}} \lambda^2 / 4\pi, \quad (2.57)$$

где $G_{\text{прм}}$ — максимальное значение коэффициента усиления.

Подставляя (2.56) или (2.57) в (2.55), получаем

$$D_{\max} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{ч}} S_{\text{а прд}} S_{\text{апрм}} S_{\text{эфф}}}{4\pi K_p K_{\text{ш}} kT \lambda^2}}, \quad (2.58)$$

или

$$D_{\max} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{ч}} G_{\text{прд}} G_{\text{прм}} S_{\text{эфф}} \lambda^2}{64\pi^3 K_p K_{\text{ш}} kT}}. \quad (2.59)$$

Если в радиолокационной станции излучение и прием сигнала осуществляются одной и той же антенной, то

вместо произведений $S_{\text{а прд}} S_{\text{а прм}}$ и $G_{\text{прд}} G_{\text{прм}}$ подставляются $S_{\text{а}}^2$ и $G_{\text{о}}^2$, соответственно:

$$D_{\text{max}} \approx \sqrt[4]{\frac{E_{\text{н}} S_{\text{а}}^2 S_{\text{эфв}}}{4\pi K_{\text{р}} K_{\text{ш}} k T \lambda^2}} \quad (2.60)$$

или

$$D_{\text{max}} = \sqrt[4]{\frac{E_{\text{н}} G_{\text{о}}^2 S_{\text{эфв}} \lambda^2}{64\pi^3 K_{\text{р}} K_{\text{ш}} k T}} \quad (2.61)$$

Анализ формул (2.58) и (2.59) приводит к следующим выводам: дальность действия радиолокатора существенно зависит от площади антенны и длины волны радиолокационной станции и в очень малой степени от увеличения энергии излучения, чувствительности приемника и эффективной отражающей площади цели.

Рассмотрим, как влияет на дальность действия радиолокатора ослабление энергии радиоволн в атмосфере. Сравнивая формулы (2.26) и (2.51), можно определить $E_{\text{сц}}$ — энергию сигнала от цели, ослабленного влиянием атмосферы следующим образом:

$$E_{\text{сц}} = (K_{\text{п}}/D^*) e^{-0,46\delta_{\text{п}} l}, \quad (2.62)$$

где $K_{\text{п}}$ — величина, включающая все остальные параметры, входящие в выражение (2.51).

Следовательно, одной и той же чувствительности радиолокационного приемника $E_{\text{чп}}$ из-за ослабляющего влияния атмосферы будут соответствовать различные дальности обнаружения, т. е.

$$E_{\text{чп}} = \frac{K_{\text{п}}}{D_{\text{max}}^4} = \frac{K_{\text{п}}}{D_{\text{max а}}^4} e^{-0,46\delta_{\text{п}} l}, \quad (2.63)$$

где $D_{\text{max а}}$ — максимальная дальность обнаружения радиолокатора с учетом ослабления энергии радиоволн в атмосфере.

Из формулы (2.63) следует:

$$D_{\text{max а}} \approx D_{\text{max}} e^{-0,115\delta_{\text{п}} l} \quad (2.64)$$

По формуле (2.64) рассчитан график (рис. 2.17), позволяющий по величине дальности действия радиолокатора без ослабления D_{max} и коэффициенту затухания $\delta_{\text{п}}$ находить $D_{\text{max а}}$. Величина участка атмосферы l , через кото-

рый проходят радиоволны, принимается при этом равной $D_{\max}$. Коэффициент затухания δ определяется по статистическим данным.

На дальность действия радиолокатора влияет также и отражение радиоволн от земной поверхности. С учетом этого обстоятельства и принимая, что прием и передача сигнала осуществляются антеннами одинаковой высоты,

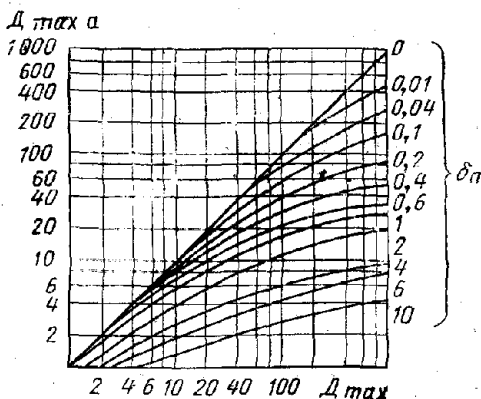


Рис. 2.17. График для расчета дальности действия радиолокатора с учетом затухания радиоволн в атмосфере.

можно написать следующую формулу, вытекающую из сравнения выражений (2.61) и (2.30):

$$D_{\max a} = 2 (\sin 2\pi h \varphi_{\text{ум}} / \lambda) D_{\max}, \quad (2.65)$$

где $D_{\max}$ — дальность действия радиолокатора с учетом влияния отражения радиоволн от поверхности Земли.

Учет влияния на дальность действия радиолокационной станции кривизны земной поверхности сводится к тому, что дальность радиолокатора ограничивается дальностью по прямой видимости $D_{\text{пв}}$, определяемой по формулам (2.31), (2.32). Обычно при этом одновременно учитывается и влияние атмосферной рефракции (2.37).

Дальность действия гидроакустической станции. Для обнаружения объекта гидролокатором необходимо, чтобы имело место следующее уравнение, которое обычно называют уравнением дальности:

$$I_a = \delta^2 I_{\text{п}} \quad (2.66)$$

или

$$p_{\Sigma} = \delta p_{\Pi}, \quad (2.67)$$

где I_{Σ} , p_{Σ} — интенсивность и давление полезного эхо-сигнала в точке приема соответственно; I_{Π} , p_{Π} — интенсивность и давление помехи, на фоне которой принимается полезный сигнал, соответственно; δ — коэффициент распознавания полезного эхо-сигнала на фоне помехи.

Интенсивность полезного эхо-сигнала — это то минимальное значение его интенсивности, при котором данный гидролокатор способен зарегистрировать сигнал на фоне помехи.

Коэффициент распознавания — величина, равная отношению давлений (либо напряжений) сигнала и помехи на входе усилителя станции, при котором полезный сигнал принимается с соответствующей вероятностью. Коэффициент распознавания находится из соотношения [21]

$$\frac{\delta^2}{\sqrt{1 + 2\delta^2}} = \frac{K_{\delta}}{\sqrt{\Delta f T}}, \quad (2.68)$$

где K_{δ} — коэффициент надежности приема, равный отношению напряжений полезного сигнала и помехи, обеспечивающему заданную вероятность приема сигнала; Δf — полоса пропускания частот приемного тракта; T — время усреднения сигнала. Формула (2.68) справедлива при условии $\Delta f T > 1$.

Отношение K_{δ}/δ характеризует качество приемно-усилительного тракта, его помехоустойчивость.

Решая уравнение (2.68) относительно δ , получаем

$$\delta^4 \Delta f T - 2K_{\delta}^2 \delta^2 - K_{\delta}^2 = 0; \quad \delta^2 = \frac{K_{\delta}^2}{\Delta f T} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta f T}{K_{\delta}^2}} \right). \quad (2.69)$$

По формуле (2.69) рассчитан график (рис. 2.18), позволяющий определить величину коэффициента распознавания δ в зависимости от величины $\Delta f T$ для различных значений коэффициента надежности приема K_{δ} .

Поскольку для гидролокаторов можно принять $\Delta f T / K_{\delta}^2 \ll 1$, то

$$\delta \approx K_{\delta} \sqrt{2} / \sqrt{\Delta f T}. \quad (2.70)$$

Рассмотрим пример расчета необходимого отношения сигнала к помехе на входе станции, обеспечивающего прием сигнала с заданной вероятностью.

Пример 2.2. Дано: $\Delta f = 10$ Гц, $T = 0,1$ с, $K_\delta = 2$. Необходимо определить отношение сигнала к помехе на входе станции δ .

Решение. С помощью графика рис. 2.18 по $\Delta f T = 1$ Гц и $K_\delta = 2$ определяем $\delta = 2,8$. Это же следует и из формулы (2.70).

Приведенные соотношения позволяют рассчитать дальность действия гидролокатора, определяемую его акустическими параметрами, пространственным уменьшением интенсивности сигнала и уровнем помех. Эта дальность называется энергетической дальностью гидролокатора. Подставив в уравнение дальности (2.66) значение интенсивности полезного эхо-сигнала I_Σ для сферического объекта [21], равное

$$I_\Sigma = \frac{P_a \gamma R_{\text{эКВ}}^2 A^2}{16\pi D^4} 10^{-0,23D}, \quad (2.71)$$

получим

$$\frac{P_a \gamma R_{\text{эКВ}}^2 A^2}{16\pi D^4} 10^{-0,23D} = \delta^2 I_n. \quad (2.72)$$

Раскроем в этой формуле значение β в соответствии с (2.38) и δ — в соответствии с (2.70). Кроме того, подставим в нее следующие величины [23]:

$$I_n = \frac{\alpha_n \Delta f}{f^2 \gamma} \left(\frac{V}{V_0} \right)^6; \quad \Delta f = 4f \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{4\pi S f^2}{c^2},$$

где α_n — размерная постоянная шумовой помехи, рассчитанная для определенной скорости V_0 ; V — скорость движения шумящего объекта; c — скорость звука в воде; S — площадь излучающей поверхности; λ — длина волны акустических колебаний сигнала; f — частота акустических колебаний сигнала.

В результате произведенных подстановок получим

$$\frac{2K_\delta^2 \alpha_n c^2 (V/V_0)^6}{T 4\pi S f^4}. \quad (2.73)$$

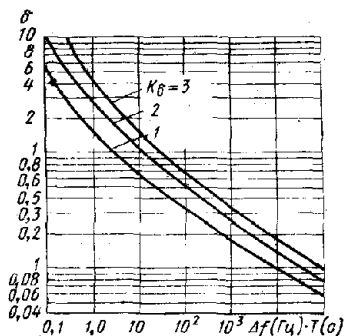


Рис. 2.18. График зависимости коэффициента распознавания δ от величины $\Delta f T$ для различных значений K_δ .

Выделим в отдельную группу величины, зависящие от частоты сигнала, и обозначим их буквой B . С учетом размерности получим

$$B = f^6 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-0,072f^{3/2}D}. \quad (2.74)$$

Из (2.73) следует, что

$$B = \frac{2a_n K_\delta^2 C^4 D^4 (V/V_0)^6}{\pi S^2 P_a R_{\text{эКВ}}^2 A^2 T} \quad (2.75)$$

или в системе СИ

$$B = \frac{3,2 \cdot 10^{12} K_\delta^2 a_n^4 D^4 (V/V_0)^6}{P_a T R_{\text{эКВ}}^2 S^2 A^2}. \quad (2.76)$$

Поскольку интересующая нас дальность действия гидролокатора D , как видно из последнего выражения, существенно зависит от B , а последнее — от частоты акустических колебаний, будем производить расчет на оптимальную частоту, т. е. на такую, при которой дальность действия максимальна. Оптимальная частота, следовательно, должна соответствовать и максимуму величины B , при котором D достигает наибольшего значения. Исследование [21] показывает, что

$$f_{\text{опт}} = (242/D)^{2/3}; \quad f_{\text{опт}} = 39/D^{2/3}. \quad (2.77)$$

Теперь, подставляя значение оптимальной частоты и учитывая (2.73), можно написать:

$$P_a = \frac{55 \cdot 10^{-3} a_n K_\delta^2 (V/V_0)^6 D^8 [\text{км}]}{T R_{\text{эКВ}}^2 S^2 A^2}.$$

$$D = \left[\frac{P_a T R_{\text{эКВ}}^2 S^2 A^2}{55 \cdot 10^{-3} a_n K_\delta^2 (V/V_0)^6} \right]^{1/8} \quad (2.78)$$

где D выражено в км; T — в с; $R_{\text{эКВ}}$ — в м; S — в м²; a_n — в Вт·Гц/м².

Пример 2.3. Дано: $P_a = 128$ Вт, $K_\delta = 3$, $A = 1$, $v = 30$ км/ч, $a_n = 10^{-2}$ Вт·Гц/м² (при $v_0 = 30$ узл), $S = 0,1$ м², $R_{\text{эКВ}} = 10$ м, $T = 0,01$ с.

Необходимо рассчитать энергетическую дальность гидролокатора.

Решение. По формуле (2.78) находим

$$D = \left[\frac{128 \cdot 0,01 \cdot 10^2 (0,1)^2 \cdot 1^2}{55 \cdot 10^{-3} 10^{-2} 3^2 (30/30)^6} \right]^{1/8} = 2,073 \text{ км}$$

Энергетическая дальность гидролокатора характеризуется лишь возможностью обнаружения объекта станцией данной мощности. На практике помимо энергетических соображений приходится считаться также и с рефракционными ограничениями, вследствие которых дальность гидролокатора может оказаться меньше энергетической.

Дальность действия гидролокатора, ограниченная рефракцией, называется геометрической дальностью (D_r). Она равна расстоянию от источника звука до границы тени (рис. 2.19,а).

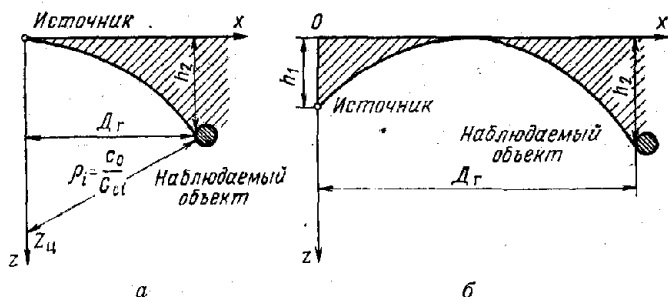


Рис. 2.19. К определению геометрической дальности действия гидролокатора.

В случае линейного распределения скорости звука по глубине с учетом того, что траектория луча представляет при этом окружность с радиусом ρ_i , можно написать [23]:

$$D_r = \sqrt{\rho_i^2 - (\rho_i - h_2)^2} = \sqrt{2\rho_i h_2 - h_2^2}, \quad (2.79)$$

где

$$\rho_i = c_0 / G_{ct}; \quad (2.80)$$

c_0 — скорость звука на уровне источника; G_{ct} — градиент скорости звука; h_2 — заглубление объекта.

Поскольку $\rho_i \gg h_2$, то

$$D_r \approx \sqrt{2\rho_i h_2}. \quad (2.81)$$

С учетом (2.80)

$$D_r \approx \sqrt{2c_0 h_2 / G_c}. \quad (2.82)$$

С заглублением источника звука геометрическая дальность существенно возрастает. В этом случае ее следует определять по лучу, претерпевающему у поверхности моря полное внутреннее отражение (рис. 2.19,б):

$$D_r = \sqrt{2c_0 / G_c} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad (2.83)$$

где h_1 — заглубление источника звука.

Пример 2.4. Дано: $h_1=10$ м, $h_2=100$ м, $c_0=1500$ м/с, $G_c=0,0348$ 1/с. Необходимо найти геометрическую дальность действия гидролокатора.

Решение. По формуле (2,83) находим

$$D_r = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{0,0348}} (\sqrt{10} + \sqrt{100}) = 3850 \text{ км.}$$

Глава 3

КИНЕМАТИКА ПОИСКА

3.1. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ И ОБЪЕКТА ПОИСКА

Гипотезы о курсе и скорости объекта поиска. В § 1.3 мы условно допустили, что при неравномерном распределении вероятных мест объекта поиска курсы объекта равновероятны в пределах от 0 до 360° . Этому случаю соответствовала формула (1.24), из которой можно получить и выражение для плотности распределения вероятных мест объекта, если курсы его распределены равномерно в секторе (K_2-K_1) . При этом будем иметь

$$\begin{aligned} f(r, t) = & \frac{1}{2(K_2-K_1)} \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\pi} \int_{K_1}^{K_2} \exp \times \\ & \times \left(-\frac{i^2 r V_o t \cos \alpha}{\sigma^2}\right) d\alpha = \frac{1}{2(K_2-K_1)} \exp \times \\ & \times \left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) Z_0\left(\frac{irV_o t}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $Z_0 = C_1 I + C_2 N_0$; N_0 — функция Бесселя 2-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента; C_1 и C_2 — постоянные, зависящие от пределов интегрирования K_1 и K_2 .

Мы также условно предположили, что скорость движения объекта поиска точно известна и не меняется. Поскольку на практике это условие не выдерживается, необходимо дополнительно рассмотреть, как изменится выражение (3.1), если мы станем учитывать скорость объекта не как постоянную безошибочную величину, а как величину случайную, подчиненную определенному

закону распределения. При этом возможны два основных варианта учета скорости объекта поиска.

Первый вариант возможен в тех случаях, когда с известной точностью мы располагаем сведениями о возможной скорости объекта. В этом случае распределение скорости объекта предполагается соответствующим релеевскому закону, плотность распределения которого равна

$$f(V_0) = \frac{V_0}{\sigma_{V_0}^2} \exp\left(-\frac{V_0^2}{2\sigma_{V_0}^2}\right), \quad (3.2)$$

где σ_{V_0} — среднеквадратическая ошибка в определении скорости объекта.

Закон Релея описывает распределение длины случайного вектора, проекции которого на координатные оси подчиняются нормальному закону. Таким образом, можно считать, что ошибка в определении вектора скорости объекта поиска является случайной величиной, подчиняющейся нормальному круговому закону.

Второй вариант учета скорости объекта поиска существует при неопределенных данных о его скорости и равных возможностях выбора любой скорости в пределах всего диапазона возможных скоростей объекта от 0 до $V_{0 \max}$. В этом случае целесообразно при рассмотрении плотности распределения величины скорости объекта принять закон равной вероятности. При этом дифференциальный закон распределения для скорости будет иметь следующий вид:

$$f(V_0) \begin{cases} = 1/V_{0 \max}, & \text{если } 0 < V_0 < V_{0 \max}, \\ = 0 & \text{вне этого промежутка.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Среднее значение скорости (математическое ожидание) будет равно

$$V_{0 \text{ ср}} = V_{0 \max}/2. \quad (3.4)$$

Среднеквадратическая ошибка в определении скорости равна

$$\sigma_{V_0} = V_{0 \max}/2\sqrt{3} \approx 0,3V_{0 \max}. \quad (3.5)$$

Пример 3.1. Дано $V_{0 \min} = 0$ узл.; $V_{0 \max} = 24$ узл. Необходимо найти $V_{0 \text{ ср}}$ и σ_{V_0} .

Решение. $V_{0 \text{ ср}} = 12$ узл., $\sigma_{V_0} = 7,2$ узл.

Траектории наблюдателя и объекта поиска. Процесс поиска связан с движением поисковых сил и объектов поиска. Однако в частном случае подвижной может быть только одна из этих сторон.

В общем случае поиск рассматривается в трехмерном пространстве. Однако наибольшее значение имеет поиск на плоскости.

В простейшем случае движение объекта поиска и наблюдателя является равномерным и прямолинейным, т. е.

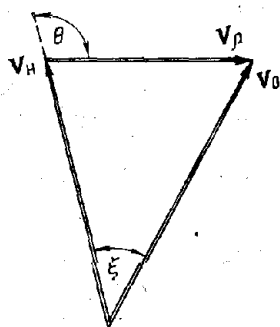


Рис. 3.1. Треугольник сложения векторов скоростей наблюдателя и объекта поиска (скоростной треугольник).

с постоянной скоростью и постоянным курсом. В более общем случае траектории наблюдателя и объекта поиска можно разбить на ряд отрезков с равномерным и прямолинейным движением. Исключение представляют лишь моменты изменения курсов, когда наблюдатели и объекты перемещаются по криволинейным траекториям с ускорениями. Традиционным является переход к относительному движению, когда наблюдатель условно неподвижен, а движение объектов происходит с относительной скоростью и относительным курсом. Для этого перехода строится треугольник сложения векторов скоростей (так называемый скоростной треугольник). Движение наблюдателя характеризуется его скоростью V_n и истинным курсом, а движение объекта — скоростью V_o и углом разности курсов ξ , отсчитываемым от V_n к V_o по направлению движения часовой стрелки (рис. 3.1) соответственно. Относительное движение объекта поиска характеризуется относительной скоростью V_p и относительным курсом θ . Из треугольника скоростей по теореме косинусов получим

$$V_p = \sqrt{V_n^2 + V_o^2 - 2V_n V_o \cos \xi}, \quad (3.6)$$

проектируя V_n и V_o на V_p :

$$V_p = -V_n \cos \theta \pm \sqrt{V_o^2 - V_n^2 \sin^2 \theta}; \quad (3.7)$$

по теореме синусов

$$\sin \theta = (V_o/V_n) \sin (\theta - \xi). \quad (3.8)$$

Уравнение траектории относительного движения объекта поиска можно получить следующим образом (рис. 3.2). Используем полярную систему координат, в которой за начало отсчета принято место наблюдателя в начальный момент времени t_0 (точка H), за полярную ось — прямая, совпадающая с линией курса наблюдате-

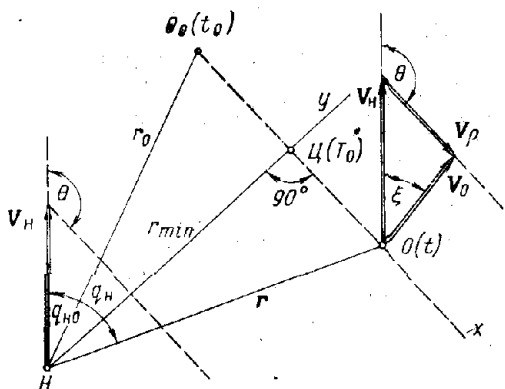


Рис. 3.2. К выводу уравнения относительной траектории движения при поиске.

ля HV_n , за радиус-вектор — вектор $\bar{r}$ — расстояние от наблюдателя до объекта, за полярный угол q_n — угол, отсчитываемый от V_n к r по направлению движения часовой стрелки. При возрастании t величины V_o , V_n , V_p , ξ и θ остаются неизменными, а r и q_n меняются.

Так, если в начальный момент t_0 расстояние наблюдатель — объект равно r_0 и курсовой угол на объект — q_{n0} , то в текущий произвольный момент времени t

$$r = r_0 + (t - t_0) V_p. \quad (3.9)$$

Выразим r и q_n через r_0 и q_{n0} . Из ΔHO_0O следует, что

$$\begin{aligned} V_p^2 (t - t_0)^2 &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos (q_n - q_{n0}); \\ (V_n^2 + V_o^2 - 2V_n V_o \cos \xi) (t - t_0)^2 &= \\ &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos (q_n - q_{n0}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Во всех случаях, за исключением равенства, когда $V_n = V_0$, между линией относительного курса объекта и наблюдателем имеется наименьшее расстояние, равное

$$r_{\min} = r_0 \sin(\theta - q_{n0}). \quad (3.11)$$

Это расстояние называют траверсной дальностью. Точка O называется относительным траверзом.

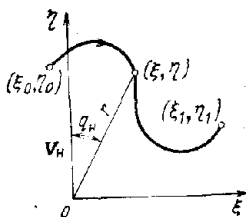
Примем за ось абсцисс прямоугольной системы координат x — направление относительного курса объекта поиска, а за ось ординат — y — направление относительного траверза. Начало координат возьмем в точке наибольшего сближения в момент относительного траверза (T_0), за положительное направление оси x — направление вектора относительной скорости объекта V_p . При этом в данной прямоугольной системе координат уравнение траектории движения объекта примет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= V_p (t - T_0), \\ y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где T_0 — момент максимального сближения объекта поиска и наблюдателя

$$q_{n0} = \arctg(y/x); \quad r^2_0 = x^2 + y^2. \quad (3.13)$$

Движение наблюдателя и объекта поиска по сложным траекториям с переменной скоростью (общий случай). Когда наблюдатель и объект поиска движутся по сложным траекториям с переменными скоростями, то непрерывное изменение их относительного положения приводит к изменению элементарных вероятностей обнаружения.



Задача состоит в том, чтобы найти выражение для элементарных вероятностей g_t и $\gamma_t dt$ на произвольно взятый момент времени t и выражение для расчета вероятности обнаружения объекта за любой отрезок времени, находящийся в пределах $t' \leq t \leq t''$.

Зададимся прямоугольной системой координат ξ, η (рис. 3.3) с началом в точке нахождения наблюдателя и вычертим относи-

Рис. 3.3. Относительная траектория объекта поиска в прямоугольной системе координат.

тельную траекторию объекта поиска C . Предположим, что нам заданы координаты объекта в функции времени, т. е. известны уравнения его относительного движения:

$$\xi = \xi(t); \quad \eta = \eta(t). \quad (3.14)$$

Так как

$$r = V \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}, \quad (3.15)$$

уравнения (1.44) можно представить в следующем виде:

$$g = g[V \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}] = g_t, \quad (3.16)$$

$$\gamma(r) dt = \gamma[V \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}] dt = \gamma_t dt. \quad (3.17)$$

Полученные равенства (3.16) и (3.17) являются искомыми аналитическими выражениями, позволяющими при знании траектории относительного движения объекта поиска рассчитать элементарные вероятности обнаружения его на произвольный момент времени t .

Теперь на основании уравнений (1.42) и (1.43) можно найти формулы расчета вероятности обнаружения объекта поиска на отрезке траектории между точками с координатами (ξ_0, η_0) и (ξ_i, η_i) :

— при дискретном обследовании

$$P_{\text{обс}}(C) = 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - g[V \sqrt{\xi^2(t_i) + \eta^2(t_i)}]\}; \quad (3.18)$$

— при непрерывном обследовании

$$P_{\text{обс}}(C) = 1 - \exp \left\{ - \int_{t'}^{t_n} \gamma[V \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}] dt \right\}. \quad (3.19)$$

В уравнении (3.18) t_i — момент i -го мгновенного наблюдения, а n — количество мгновенных наблюдений за время от момента t' до момента t'' , причем $t' \leq t_1 < t_2, \dots, t_i, \dots, < t_n \leq t''$.

На основании ранее оговоренных условий (1.14) формулы (3.18) и (3.19) можно представить в виде следующего равенства:

$$P_{\text{обс}}(C) = 1 - e^{-F(C)}, \quad (3.20)$$

где для дискретного обследования

$$F(C) = \sum_{i=1}^n \ln \{1 - g[V \sqrt{\xi^2(t_i) + \eta^2(t_i)}]\}, \quad (3.21)$$

а для непрерывного обследования

$$F(C) = \int_{t'}^{t_n} \gamma [\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}] dt. \quad (3.22)$$

Поскольку $ds = V_p dt$, то выражение для $F(C)$ можно представить в виде криволинейного интеграла по траектории C , т. е.

$$F(C) = \int_C \frac{\gamma(r) ds}{V_p}. \quad (3.23)$$

Потенциал обнаружения $F(C)$ обладает свойством аддитивности, которое в данном случае означает, что если C_1 и C_2 — две траектории и $C = C_1 + C_2$ — их комбинация или сумма, а $P_{об}(C) = P_{об}(C_1 + C_2)$ является вероятностью обнаружения объекта поиска хотя бы на одной из этих траекторий, то $P_{об}(C)$ можно рассчитать по формуле (3.20), причем

$$F(C_1 + C_2) = F(C_1) + F(C_2). \quad (3.24)$$

Действительно, чтобы подсчитать вероятность обнаружения объекта на траектории C_1 или C_2 , можно воспользоваться формулой сложения вероятностей для совместных событий:

$$P_{об}(C) = 1 - [1 - P_{об}(C_1)][1 - P_{об}(C_2)]. \quad (3.25)$$

А так как

$$P_{об}(C_1) = 1 - e^{-F(C_1)}, \quad (3.26)$$

$$P_{об}(C_2) = 1 - e^{-F(C_2)}, \quad (3.27)$$

то после подстановки уравнений (3.26) и (3.27) в равенство (3.25) будем иметь

$$P_{об} = 1 - e^{-F(C_1)} e^{-F(C_2)} = 1 - e^{-[F(C_1) + F(C_2)]}. \quad (3.28)$$

Полученный результат свидетельствует о справедливости формулы (3.24).

Следует отметить, что свойство аддитивности потенциала обнаружения применимо к любому числу траекторий. Ввиду этого свойство аддитивности может быть использовано при расчете вероятности обнаружения объекта поиска, движущегося по ломаной траектории, а также при расчете вероятности обнаружения объекта не-

сколькими наблюдателями, относительно которых объект движется соответственно по траекториям $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_N$.

На практике наиболее важен случай, когда траектория является прямолинейной и относительная скорость V_p — постоянной. В этом случае расчеты целесообразно производить с помощью прямоугольной системы координат x, y , в которой x является траверсным расстоянием, а за ось y принята прямая, совпадающая с линией относительного перемещения объекта поиска. В данной системе координат уравнения движения объекта можно представить в следующем виде:

$$x = \text{const}; \quad y = V_p t, \quad (3.29)$$

где t измеряется от момента наибольшего сближения объекта поиска с наблюдателем, а за положительное направление оси y принимается положительное направление вектора относительной скорости V_p .

Для равномерного и прямолинейного движения наблюдателя и объекта поиска потенциал обнаружения можно рассчитать по формулам

$$\begin{aligned} F(C) &= - \sum_{i=1}^n \ln[1 - g(\sqrt{V^2 x^2 + V_p^2 t_i^2})] = \\ &= - \sum_{i=1}^n \ln[1 - g(\sqrt{x^2 + y_i^2})], \end{aligned} \quad (3.30)$$

при непрерывном обследовании

$$F(C) = \int_t^{t_n} \gamma(\sqrt{V^2 x^2 + V_p^2 t^2}) dt = \frac{1}{V_p} \int_{y'}^{y''} \gamma(\sqrt{x^2 + y^2}) dy. \quad (3.31)$$

В формулах (3.30) и (3.31) y_i — расстояние от объекта поиска до точки максимального сближения с наблюдателем в момент i — t мгновенного наблюдения; $y', x' = x, y'', x'' = x$ — крайние точки траектории C .

Как видно из формул (3.28), (3.30) и (3.31), вероятность $P_{об}(x)$ обнаружения объекта поиска является функцией траверсного расстояния x .

Движение наблюдателя и объекта поиска прямолинейно и равномерно (частный случай). Когда наблюдатель и объект поиска движутся прямолинейно с постоян-

ной скоростью и курсом в течение длительного времени до и после их наибольшего сближения, можно найти аналитическую зависимость вероятности обнаружения объекта от траверзного расстояния x .

Уравнение (3.20) в общем виде можно представить следующим образом:

$$P_{об}(x) = 1 - e^{-F(x)}, \quad (3.32)$$

где $F(x)$ — потенциал обнаружения $F(C_v)$, а C_v — траектория в виде бесконечной прямой, находящейся на ближайшем расстоянии x от наблюдателя. Значения $F(x)$ в зависимости от способа обследования пространства находятся по формулам (3.30) и (3.31) соответственно, при этом в случае дискретного обследования суммирование производится по всем целым значениям i , а в случае непрерывного обследования пределы интегрирования принимаются равными $y_1 = -\infty$ и $y_2 = \infty$.

Воспользовавшись распределением $P_{об}(x)$, можно найти среднее количество объектов поиска $M(t)$, обнаруженных за время t , если известна плотность объектов N_0 (количество объектов на единицу площади).

Предположим, что t — длительный период, по сравнению с которым время присутствия объекта поиска в пределах дальности возможного обнаружения мало. Тогда количество объектов dM , проходящих за единицу времени зону обнаружения на относительном траверзном расстоянии между x и $x+dx$, будет равно плотности объектов N_0 , умноженной на элементарную площадь $ydx = V_p dx$, т. е. $dM = N_0 V_p dx$. Математическое ожидание количества обнаруженных объектов dM_0 равно

$$dM_0 = P_{об}(x) N_0 V_p dx. \quad (3.33)$$

Ввиду того, что в рассмотренном случае траверзное расстояние является случайной величиной, среднее количество объектов поиска M_0 , обнаруживаемых наблюдателем при проникновении его через зону обнаружения на относительном траверзном расстоянии в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, может быть найдено интегрированием выражения (3.33) по x в бесконечных пределах:

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{об}(x) N_0 V_p dx \quad (3.34)$$

$$M_0/N_0 V_p = \int_{-\infty}^{\infty} P_{об}(x) dx. \quad (3.35)$$

Эффективная ширина полосы обследования. Выражение (3.35), имеющее линейную размерность, служит для расчета так называемой эффективной ширины полосы обследования, обозначаемой $\Pi_{эф}$. На основании левой части уравнения (3.35) можно сделать вывод, что $\Pi_{эф}$ — это полоса, в пределах которой за единицу времени в среднем обнаруживают M_0 объектов, равномерно распределенных в поисковом районе с плотностью N_0 и имеющих одинаковую векторную скорость $\bar{V}_p$. Такое истолкование эффективной ширины полосы обследования показывает, что ее значение может быть получено опытным путем.

Например, применительно к самолетному радиолокатору, предназначенному для обнаружения наземных или надводных объектов, этот опыт можно произвести следующим образом. В некотором районе площадью S выставляются объекты с плотностью N_0 на 1 км². Расположение объектов и путь самолета должны быть случайными. Если радиолокатор за единицу времени полета самолета со скоростью V_n обнаружил M_0 объектов, то эффективную ширину полосы обследования можно рассчитать по формуле

$$\Pi_{эф} = M_0/N_0 V_n. \quad (3.36)$$

Следует отметить, однако, что определение значения $\Pi_{эф}$ на основе специальных опытов невыгодно с экономической стороны и представляет некоторую трудность из-за организации проведения этих опытов, так как на практике очень трудно достичь действительно случайного расположения объектов в районе и случайного выбора курсов полета самолета при поиске.

Из формулы (3.35) также следует, что эффективная ширина полосы обследования представляет собой площадь, ограниченную кривой $P_{об}(x)$. Подставив в формулу (3.35) вместо $P_{об}(x)$ ее значение, получим

$$\Pi_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{-F(x)}] dx. \quad (3.37)$$

С учетом формул (3.30) и (3.31) выражение для $\Pi_{эф}$ в зависимости от способа обследования можно представить в следующем виде:

— при дискретном обследовании

$$Ш_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \ln [1 - g(\sqrt{x^2 + y_i^2})] \right\} \right) dx, \quad (3.38)$$

— при непрерывном обследовании

$$Ш_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{1}{V_p} \int_{y_1}^{y_2} \gamma(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \right] \right\} dx. \quad (3.39)$$

Законы распределения истинных дальностей «наблюдатель — объект поиска». Знание эффективной ширины полосы обследования часто бывает недостаточным для оценки эффективности прибора наблюдения. Действительно, в реальных условиях весьма часто возникает

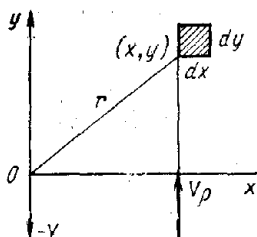


Рис. 3.4. К установлению закона распределения истинных дальностей «наблюдатель — объект поиска».

необходимость не только в обнаружении объекта поиска, но и в обнаружении его на определенной дальности, чтобы успешно решить последующую задачу. Например, радиолокатор должен обнаруживать воздушные объекты на такой дальности, чтобы обеспечить своевременное открытие огня по этим объектам или наведение истребительной авиации; мины или подводные препятствия должны обнаруживаться корабельным гидролокатором на такой дальности, чтобы корабль успел произвести маневр уклонения и т. д.

Для оценки эффективности средств наблюдения при решении этой задачи необходимо иметь в своем распоряжении вероятность подхода объекта на данную дальность, будучи необнаруженным. Распределение этих дальностей называют распределением истинных дальностей.

Условия для нахождения аналитического выражения законов распределения истинных дальностей можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что объекты равномерно распределены по всей площади района поиска с плотностью N_0 (N_0 целей на 1 км^2) и все они движутся относительно

наблюдателя равномерно и прямолинейно с векторной скоростью $\bar{V}_p$ параллельно оси φ в направлении возрастания φ (рис. 3.4). Требуется найти выражение, позволяющее определить вероятность обнаружения объектов на данной дальности, используя полученные ранее результаты.

Для решения этой задачи найдем сначала среднее количество объектов dM_0 , обнаруживаемых за единицу времени на элементарном участке площади $dxdy$. Очевидно, что dM_0 будет пропорционально плотности объектов N_0 в поисковом районе и величине площади $dxdy$, т. е.

$$dM_0 = N_0 \Omega(x, y) dxdy, \quad (3.40)$$

где функцию $\Omega(x, y)$, представляющую собой в уравнении (3.40) коэффициент пропорциональности, можно охарактеризовать как средний поток (интенсивность потока) объектов, протекающий за единицу времени через точку с координатами x, y .

Аналитическое выражение для функции $\Omega(x, y)$ можно найти путем следующих рассуждений. Объект, перемещающийся с относительной скоростью V_p в направлении возрастания φ , будет находиться в пределах элементарной площади $dxdy$ в течение времени $dt (dy/V_p)$.

Вероятность обнаружения объектов поиска за это время равна произведению вероятности того, что объект не обнаружен ранее, и вероятности того, что обнаружение объекта произойдет как раз во время пересечения им площади $dxdy$.

Первая вероятность на основании уравнения (3.20) будет равна $e^{-F(x, y)}$, где потенциал обнаружения $F(x, y)$ в случае дискретного обследования рассчитывается по формуле (3.30), в которой суммирование производится по всем значениям y , удовлетворяющим неравенству $y_i \leq y' - iV_p \Delta t$ ($i = 1, 2, 3, \dots, \infty$), а в случае непрерывного обследования — по формуле (3.31) при $y' = -\infty$ и $y'' = y$.

Вторая вероятность в случае дискретного обследования пространства определяется вероятностями совместного появления двух независимых событий: вероятностью того, что мгновенное наблюдение произойдет

в момент нахождения объекта в пределах площади $dxdy$, и мгновенной вероятностью обнаружения объекта, находящегося на расстоянии r от наблюдателя, т. е.

$$g(r) dt / \Delta t = g(r) dy / V_p \Delta t; \quad (3.41)$$

в случае непрерывного обследования пространства вторая вероятность будет равна

$$\gamma(r) dt = \gamma(r) dy / V_p. \quad (3.42)$$

Таким образом, вероятность $P_{об}(x, y)$ обнаружения объекта на элементарной площади $dxdy$ будет равна:

— при дискретном обследовании

$$P_{об}(x, y) = e^{-F(x, y)} \frac{g(r) dy}{V_p \Delta t}, \quad (3.43)$$

— при непрерывном обследовании

$$P(x, y) = e^{-F(x, y)} \frac{\gamma(r) dy}{V_p}. \quad (3.44)$$

Учитывая, что за единицу времени в пределах площади находится $N_0 V_p dx$ объектов, среднее количество обнаружений за единицу времени будет равно:

— при дискретном обследовании

$$dM_0 = N_0 V_p P_{об}(x, y) dx = (N_0 / \Delta t) e^{-F(x, y)} g(r) dxdy; \quad (3.45)$$

— при непрерывном обследовании

$$dM_0 = N_0 V_p P(x, y) dx = N_0 e^{-F(x, y)} \gamma(r) dxdy. \quad (3.46)$$

Ввиду того, что с помощью формулы (3.40) и соответственно формул (3.45) и (3.46) определяется одна и та же физическая величина — среднее количество объектов dM_0 , обнаруживаемых за единицу времени на элементарном участке площади $dxdy$, можно приравнять их правые части. В результате этого будем иметь:

— при дискретном обследовании

$$N_0 \Omega(x, y) dxdy = (N_0 / \Delta t) e^{-F(x, y)} g(r) dxdy; \quad (3.47)$$

— при непрерывном обследовании

$$N_0 \Omega(x, y) dxdy = N_0 e^{-F(x, y)} \gamma(r) dxdy. \quad (3.48)$$

Из уравнений (3.47) и (3.48) находим аналитические выражения для функции $\Omega(x, y)$:

— при дискретном обследовании

$$\Omega(x, y) = e^{-F(x, y)} g(r) / \Delta t, \quad (3.49)$$

где

$$F(x, y) = - \sum_{i=1}^{\infty} \ln \{1 - g[\sqrt{x^2 + (y - iV_p \Delta t)^2}]\}; \quad (3.50)$$

— при непрерывном обследовании

$$\Omega(x, y) = e^{-F(x, y)} \gamma(r), \quad (3.51)$$

где

$$F(x, y) = \frac{1}{V_p} \int_{-\infty}^y (\sqrt{x^2 + y^2}) dy. \quad (3.52)$$

Используя формулу (3.40), можно рассчитать среднее количество объектов $M_0(S)$, обнаруживаемых наблюдателем за единицу времени в пределах некоторой площади S , перемещающейся вместе с ним:

$$M_0(S) = N_0 \int_S \Omega(x, y) dx dy. \quad (3.53)$$

Когда площадь $S = S_D$ представляет собой круг радиусом D с центром в точке нахождения наблюдателя, целесообразно от прямоугольной системы координат перейти к полярной, в которой за полярную ось принять ось φ , за радиус-вектор — вектор $\vec{r}$, а за полярный угол — угол ξ , отсчитываемый от положительного направления оси φ к радиус-вектору $\vec{r}$ по направлению движения часовой стрелки. В полярной системе координат уравнение (3.53) будет иметь вид

$$M_0(S_D) = N_0 \int_0^D dr \int_0^{2\pi} r \Omega(r \sin \xi, r \cos \xi) d\xi. \quad (3.54)$$

Так как среднее количество объектов, обнаруживаемых за единицу времени на расстоянии между r и $r + dr$, пропорционально плотности объектов N_0 и элементу дальности dr

$$dM_0(r) = N_0 \rho(r) dr, \quad (3.55)$$

где $\rho(r)$ — коэффициент пропорциональности, характеризующий интенсивность потока объектов, который протекает за единицу времени на расстоянии r от наблю-

дателя при данной плотности объектов N_0 , то $M_0(S_d)$ может быть найдено также из формулы

$$M_0(S_d) = N \int_0^D \rho(r) dr. \quad (3.56)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.54) и (3.56), получаем

$$N_0 \int_0^D dr \int_0^{2\pi} r \Omega(r \sin \xi, r \cos \xi) d\xi = N_0 \int_0^D \rho(r) dr. \quad (3.57)$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по D . В результате будем иметь

$$\rho(r) = \int_0^{2\pi} r \Omega(r \sin \xi, r \cos \xi) d\xi. \quad (3.58)$$

Выше было доказано, что среднее количество объектов поиска, обнаруживаемых наблюдателем за единицу времени на всех возможных дальностях, может быть найдено по формуле (3.40). В свою очередь, среднее количество объектов, обнаруживаемых на расстоянии между r и $r+dr$, рассчитывается по формуле (3.55). Поэтому вероятность того, что объект поиска, случайно выбранный из совокупности всех обнаруживаемых объектов $M_0 = N_0 V_p \Pi_{эф}$, будет обнаружен на расстоянии от наблюдателя, заключенном между r и $r+dr$, равна $\rho(r) dr / V_p \Pi_{эф}$.

Функция $\rho(r)$, описываемая уравнением (3.58), либо эквивалентные ей функции $N_{ор}(r)$ и $\rho(r)/V_p \Pi_{эф}$ выражают аконы плотностей распределения истинных дальностей.

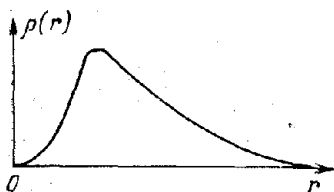


Рис. 3.5. Типовой график плотности распределения истинной дальности «наблюдатель—объект поиска».

Общее для этих функций то, что они не являются монотонными, в связи с тем, что объектов, случайно подходящих близко к наблюдателю, немного и еще меньше их может быть обнаружено в непосредственной близости от наблюдателя.

Типовая кривая подобной функции представлена на

рис. 3.5. Следует отметить, что вид функции $\rho(r)$ определяется законом распределения дальности действия $f(D)$, свойственным данному средству наблюдения.

На практике для тактических расчетов очень важно знать математическое ожидание дальности r , на которой обнаруживаются типовые объекты. На основании определения математического ожидания можно написать, что

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{V_{\rho \Pi_{\text{эф}}}} \int_0^{\infty} r \rho(r) dr = \\ &= \frac{1}{V_{\rho \Pi_{\text{эф}}}} \int_0^{2\pi} \int_0^D r^2 \Omega(r \sin \xi, r \cos \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Зная среднее значение дальности обнаружения того или иного объекта, можно определить эффективность данного средства при решении поставленной перед ним задачи.

3.2. ВОЗМОЖНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ПОИСКА В ПРЕДЕЛАХ ДАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ СРЕДСТВ ОБНАРУЖЕНИЯ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ)

Построение области возможных встреч наблюдателя и объекта поиска. Необходимым условием обнаружения объекта поиска является появление его в пределах дальности действия средств наблюдения. Поэтому наблюдатель стремится маневрировать таким образом, чтобы быстрее привести объект на границу действия своих средств наблюдения.

Проанализируем возможности встречи наблюдателя и объекта применительно к различным условиям ведения поиска. Вначале рассмотрим случай, когда дальность обнаружения объекта поиска равна нулю ($D_{\text{об}}=0$). На практике это соответствует поиску средствами обнаружения, требующими непосредственного контакта с целью, а также поиску при малых дальностях обнаружения.

Исходные позиции наблюдателя и объекта поиска H_0 и O_0 , соответственно (рис. 3.6), исходное расстояние D_0 .

Можно показать, что геометрическим местом точек встречи наблюдателя и объекта поиска вплотную при

определенном отношении их скоростей V_H/V_O является окружность. Действительно, пусть C_3 — одна из возможных точек встречи наблюдателя с объектом, соответствующая курсу наблюдателя K_H . Проведем биссектрисы углов при точке C_3 : C_3C_1 — биссектриса угла $H_0C_3O_0$; C_3C_2 — биссектриса угла $K_HC_3O_0$. Точки C_1 и C_2 лежат на прямой линии H_0O_0 и на ее продолжении.

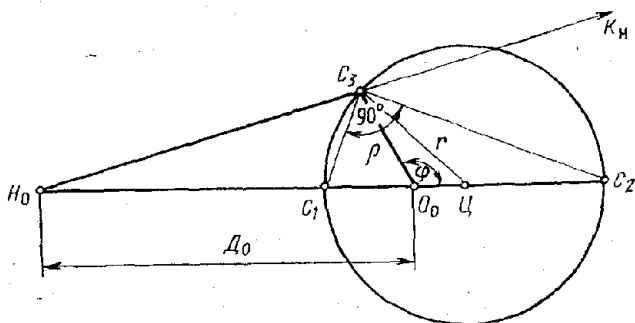


Рис. 3.6. К расчету окружности встреч.

Как известно, биссектриса делит противоположащую сторону треугольника (или ее продолжение) на части, пропорциональные двум другим его сторонам:

$$\frac{H_0C_1}{O_0C_1} = \frac{H_0C_3}{O_0C_3} \text{ и } \frac{H_0C_2}{O_0C_2} = \frac{H_0C_3}{O_0C_3}. \quad (3.60)$$

Поскольку, по условию, C_3 — точка встречи, то расстояние от нее к наблюдателю и объекту поиска пропорциональны соответствующим скоростям:

$$\frac{H_0C_3}{O_0C_3} = \frac{V_H}{V_O}. \quad (3.61)$$

Сравнивая отношения (3.61) и (3.60), получаем

$$\frac{H_0C_1}{O_0C_1} = \frac{V_H}{V_O} \text{ и } \frac{H_0C_2}{O_0C_2} = \frac{V_H}{V_O}.$$

Из последней пропорции следует, что точки C_1 и C_2 также являются точками встречи, ибо наблюдатель и объект поиска приходят в них одновременно. Причем встреча в точке C_1 происходит в тех случаях, когда наб-

людователь идет навстречу объекту, а в точке C_2 — когда наблюдатель догоняет объект.

Итак, точки C_1 , C_2 и C_3 — точки встречи наблюдателя с объектом поиска. Через три точки можно провести окружность.

Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего смежных углов C_3C_1 и C_3C_2 , как известно, пересекаются под углом 90° , то вписанный угол $C_1C_3C_2$ является прямым и опирается на диаметр этой окружности C_1C_2 . Середина этого диаметра дает центр окружности — точку Π . Полученная окружность является геометрическим местом точек встреч наблюдателя с объектом при данном отношении скоростей V_H/V_O и называется окружностью встреч.

Заметим, что отношение расстояний от начальных местоположений наблюдателя и объекта поиска до любой точки окружности встреч — величина постоянная, равная отношению их скоростей V_H/V_O .

Расчет элементов и построение окружности встреч. Как видно из рис. 3.6, радиус окружности встреч r можно получить следующим образом:

$$r = \frac{C_1C_2}{2} = \frac{O_0C_1 + O_0C_2}{2}. \quad (3.62)$$

В свою очередь, $O_0C_1 = V_O t_{сб1}$, где $t_{сб1}$ — время сближения наблюдателя и объекта вплотную в точке C_1 . Из рисунка видно, что $D_0 = V_H t_{сб1} + V_O t_{сб1}$, откуда $t_{сб1} = D_0 / (V_H + V_O)$.

Далее, $O_0C_2 = V_O t_{сб2}$, где $t_{сб2}$ — время сближения наблюдателя и объекта вплотную в точке C_2 . Очевидно, что $D_0 = V_H t_{сб2} - V_O t_{сб2}$, откуда $t_{сб2} = D_0 / (V_H - V_O)$.

Подставляя соответствующие значения в (3.62), получаем

$$r = \frac{V_O t_{сб1} + V_O t_{сб2}}{2} = \frac{V_H V_O D_0}{V_H^2 - V_O^2}. \quad (3.63)$$

Для построения окружности встреч аналитическим путем необходимо помимо значения радиуса определить также положение центра этой окружности. Отыскание его сводится к нахождению величины $O_0\Pi$.

Как видно из рис. 3.6,

$$O_0\Pi = r - O_0C_1 = r - V_O t_{сб1} = \frac{V_H^2 D_0}{V_H^2 - V_O^2}. \quad (3.64)$$

Уравнение окружности встреч в полярной системе координат можно найти из следующих очевидных соотношений (см. рис. 3.6):

$$(V_H t_{сб})^2 = (\rho \sin \varphi)^2 + (D_0 - \rho \cos \varphi)^2; \quad (3.65)$$

$$V_0 t_{сб} = \rho, \quad (3.66)$$

где $t_{сб}$ — время сближения наблюдателя и объекта вплотную в точке C_3 ; ρ и φ — текущие полярные координаты.

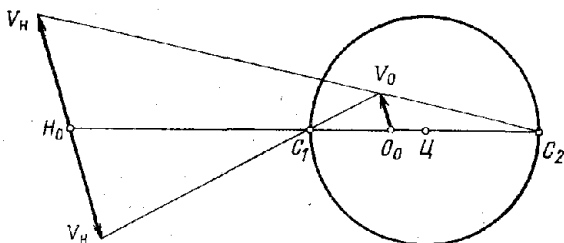


Рис. 3.7. Графическое построение окружности встреч.

Подставим значение $t_{сб}$ из (3.66) в (3.65):

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 \sin^2 \varphi + (D_0 - \rho \cos \varphi)^2} = \frac{V_0^2}{V_H^2}. \quad (3.67)$$

Окружность встреч можно построить также графически (рис. 3.7). Для этого от точки H_0 в противоположных направлениях откладывается вектор скорости наблюдателя, а от точки O_0 в одном из избранных направлений — вектор скорости объекта поиска. Соединяя концы противоположно направленных векторов, получаем в пересечении с линией $H_0 O_0$ точку встречи C_1 . Соединяя векторы одинакового направления, получаем в пересечении с продолжением линии $H_0 O_0$ точку встречи C_2 . Середина линии $C_1 C_2$ (точка C) — центр окружности встреч, $C_1 O$ — радиус окружности встреч.

Рассмотрим, как сказывается на форме окружности встреч изменение скоростей наблюдателя и объекта поиска. Для этого проанализируем формулы (3.63) и (3.64). Вначале возьмем крайний случай, когда скорость объекта $V_0 = 0$. Получаем: $r = 0$ и $O_0 C = 0$. Это означает, что окружность встреч обращается в точку, совпадаю-

щую с местом объекта поиска O_0 , в которой и происходит встреча (рис. 3.8).

С появлением у объекта скорости ($(V_H/V_0) > 1$) появляется и окружность встреч: $V_0 \neq 0$, $r \neq 0$, $O_0C \neq 0$. При этом, как видно из упомянутых выше формул, рост величины радиуса окружности встреч превышает увеличение скорости объекта (при неизменной скорости наблюдателя), а центр этой окружности перемещается вправо ($C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$).

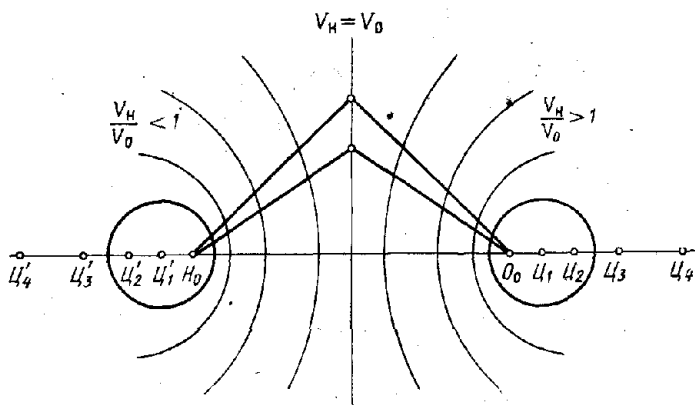


Рис. 3.8. Зависимость окружности встреч от изменений скоростей наблюдателя и объекта поиска.

Когда скорость объекта становится равной скорости наблюдателя ($V_0 = V_H$), то $r = \infty$. При этом окружность встреч превращается в прямую линию. В этом нетрудно убедиться, откладывая от ее границ к точкам H_0 и C_0 равные отрезки пути. Как только скорость объекта поиска превысит скорость наблюдателя ($(V_H/V_0) < 1$), окружность встреч меняет кривизну и строится около точки H_0 — исходного положения наблюдателя. Причем по мере увеличения скорости объекта центр окружности встреч перемещается вправо, а радиус уменьшается.

Наконец, при скорости наблюдателя, равной нулю, окружность встреч обращается в точку, совпадающую с местом наблюдателя H_0 , в которой и происходит встреча.

Расчет встречи линии наблюдения с объектом поиска. На практике может возникнуть случай, когда обнаружение объекта требует сближения с ним вплотную некото-

рой линии MN (рис. 3.9). Геометрическое место точек встреч этой линии с объектом при этом может быть найдено на основании следующих соображений.

Пусть C — место встречи одной из точек линии MN с объектом, а D_0 — исходное расстояние от линии MN до объекта. К моменту встречи наблюдатель — линия MN , имеющая скорость V_{MN} , проходит расстояние, равное $V_{MN}t_{сб}$, а объект — расстояние $V_0t_{сб}$.

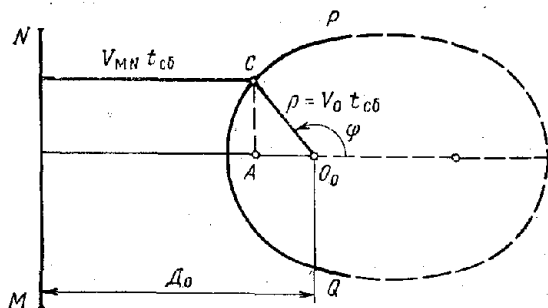


Рис. 3.9. К расчету эллипса встреч.

Следовательно, если PQ — линия, являющаяся геометрическим местом встреч наблюдателя — линии MN с объектом, то для любой ее точки отношение

$$\frac{V_0 t_{сб}}{V_{MN} t_{сб}} = \frac{V_0}{V_{MN}} = m,$$

причем m — здесь величина постоянная.

Но, как известно из аналитической геометрии, геометрическим местом точек, для которых расстояния до заданной точки и до заданной прямой — величина постоянная, является кривая второго порядка: эллипс, парабола или гипербола. Причем характер кривой зависит исключительно от величины отношения скоростей объекта и наблюдателя:

- при $V_0/V_{MN} < 1$ геометрическое место точек встреч — эллипс;
- при $V_0/V_{MN} = 1$ — парабола;
- при $V_0/V_{MN} > 1$ — гипербола.

Наибольший интерес представляет случай, когда скорость наблюдателя (линии MN) больше, чем скорость объекта поиска, ибо лишь при этом объект не сможет уйти от обнаружения. Этому случаю, как было показа-

но, соответствует геометрическое место точек встреч в виде эллипса, в одном из фокусов которого (точке O_0) находится объект поиска (см. рис. 3.9). Уравнение такого эллипса (его можно по аналогии с окружностью встреч назвать эллипсом встреч) в полярной системе координат можно вывести из следующих очевидных соотношений:

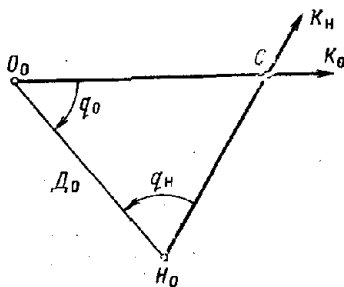
$$V_{\text{н}} t_{\text{сб}} = D_0 + V_0 t \cos \varphi, \quad (3.68)$$

$$V_0 t = \rho. \quad (3.69)$$

Подставив значение $t_{\text{сб}}$ из (3.69) в (3.68), получим

$$\frac{V_{\text{н}} \rho}{V_0} = D_0 + \rho \cos \varphi, \\ \rho = \left(\frac{V_0}{V_{\text{н}}} D_0 \right) / \left(1 - \frac{V_0}{V_{\text{н}}} \cos \varphi \right). \quad (3.70)$$

Возможности сближения наблюдателя с объектом поиска. Сближение вплотную. Критический курсовой угол. Чтобы сближаться с объектом поиска, перемещающимся с постоянной скоростью V_0 и курсом K_0 вплотную, наблюдатель, имеющий скорость $V_{\text{н}}$, должен лечь на курс сближения $K_{\text{н}}$ и привести цель на некоторый рассчитанный курсовой угол $q_{\text{н}}$ (рис. 3.10), величина которого определяется следующим образом¹:



По условию сближения вплотную

Рис. 3.10. Сближение вплотную.

$$O_0 C = V_0 t_{\text{сб}}; \quad H_0 C = V_{\text{н}} t_{\text{сб}}.$$

По теореме синусов

$$\frac{O_0 C}{H_0 C} = \frac{\sin q_{\text{н}}}{\sin q_0} = \frac{V_0}{V_{\text{н}}},$$

¹ Курсовым углом называется угол между диаметральной плоскостью наблюдателя и направлением «наблюдатель — объект поиска». Курсовые углы измеряются от 0 до 180° соответствующего борта наблюдателя и цели.

откуда следует

$$\sin q_n = \frac{\sin q_0}{m}; \quad q_n = \arcsin \left(\frac{\sin q_0}{m} \right), \quad (3.71)$$

где q_0 — курсовой угол цели.

Таблица значений q_n , округленных до одного градуса, в зависимости от q_0 и $1/m = V_0/V_n$ дана в приложении (табл. 1).

Пример 3.2. Наблюдатель находится на курсовом угле объекта поиска $q_0 = 30^\circ$ правого борта; $V_n = 60$ км/ч, $V_0 = 90$ км/ч.

Необходимо рассчитать, на какой курсовой угол наблюдателя следует привести объект, чтобы обеспечить сближение с ним вплотную.

Решение. В табл. 1 приложения по $V_0/V_n = 90/60 = 1,5$ и $q_0 = 30^\circ$, находим $q_n = 48^\circ$ левого борта (борт наблюдателя, как видно из рис. 3.10, противоположен борту объекта).

Формула (3.71) показывает, что возможность решения задачи сближения вплотную не связана с исходной дистанцией и определяется исключительно отношением скоростей объекта поиска и наблюдателя, а также курсовым углом объекта.

Причем, поскольку соотношение (3.71) остается верным для любого момента времени в процессе сближения, то очевидно, что q_n остается на протяжении всего маневра постоянным. А так как и q_0 при этом постоянен, то значит неизменно постоянным будет до момента встречи и направление «наблюдатель — объект поиска». Из сказанного справедливо обратное.

Рассмотрим возможности сближения вплотную в зависимости от отношения скоростей объекта и наблюдателя

1. $V_0 < V_n (V_0/V_n < 1)$.

Сближение вплотную возможно всегда, так как в соответствии с (3.71) в этом случае $\sin q_n < 1$ и $0 < q_n < 90^\circ$.

2. $V_0 \geq V_n (V_0/V_n \geq 1)$.

Здесь возможны два случая:

а) $q_0 \geq 90^\circ$. Сближение вплотную невозможно, так как даже при наиболее благоприятном случае, когда $V_0 = V_n$ и $q_0 = 90^\circ$, $\sin q_n = \sin q_0 = 1$; $q_n = 90^\circ$. Наблюдатель при этом идет курсом, параллельным курсу объекта, и сближение вплотную исключается.

б) $q_0 < 90^\circ$. Сближение вплотную возможно не

всегда, а лишь в тех случаях, когда

$$\sin q_n \leq 1. \quad (3.72)$$

Найдем предельное, наибольшее значение курсового угла объекта, при котором сближение вплотную еще возможно. Очевидно, оно может быть найдено из (3.72):

$$\sin q_0 = V_n/V_o. \quad (3.73)$$

Полученное значение курсового угла объекта поиска, при котором наблюдатель, обладая меньшей скоростью, может сблизиться вплотную с объектом, называется критическим курсовым углом Q . Как видно из (3.73),

$$Q = \arcsin m, \quad (3.74)$$

где $m = V_n/V_o$.

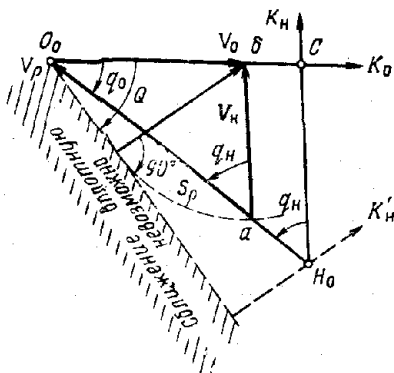


Рис. 3.11. Графическое решение задачи сближения вплотную.

Из рис. 3.11 следует, что при нахождении наблюдателя на внешней стороне критического курсового угла, сближение его с объектом вплотную осуществляется курсом, перпендикулярным этой стороне.

Таблица значений критического курсового угла, округленных до $0, 5^\circ$ в зависимости от m дана в приложении (табл. 2).

Время сближения наблюдателя с объектом вплотную рассчитывается по формуле, вытекающей из рис. 3.10:

$$D_0 = V_o t_{сб} \cos q_0 + V_n t_{сб} \cos q_n, \quad (3.75)$$

$$t_{сб} = \frac{D_0}{V_o \cos q_0 + V_n \cos q_n}.$$

В примере 3.2 при $D_0 = 30$ км $t_{сб} = 25,4$ мин.

Задачу сближения вплотную можно решить также графическим путем (см. рис. 3.11). По направлению движения объекта поиска от точки O_0 проводят вектор скорости объекта V_0 . Из его конца, как из центра, радиусом, равным скорости наблюдателя, производится в точке a засечка линии, соединяющей H_0 и O_0 . В результате получаем искомый вектор скорости наблюдателя V_n , показывающий как ее величину, так и направление курса сближения вплотную K_n . Проведя из точки H_0 по этому направлению (параллельно V_n) линию движения наблюдателя, получаем в пересечении с линией курса объекта точку встречи (С).

Образовавшийся треугольник O_0H_0C называют путевым, поскольку две его стороны O_0C и H_0C представляют собой пути объекта поиска и наблюдателя до точки встречи. Сторона H_0C_0 называется относительным перемещением (S_p).

Построенный нами вспомогательный треугольник O_0ab , подобный путевому, называется скоростным. Две его стороны образуют скорости объекта и наблюдателя, третья сторона O_0a — это так называемая относительная скорость V_p .

Графически нетрудно получить и величину критического курсового угла объекта поиска Q . Его внешняя граница представляет собой касательную к дуге окружности радиуса V_n с центром в точке a . Рисунок наглядно показывает, что это действительно предельное значение курсового угла объекта, при котором еще возможно сблизиться с ним вплотную.

Сближение на дальность действия средств обнаружения (общий случай). Рассмотрим общий случай сближения наблюдателя с объектом поиска на дальность действия средств обнаружения ($D_{об}$). При этом будем полагать, что одновременно с сокращением дистанции изменяется и курсовой угол объекта на величину $\theta = q_{01} - q_{00}$ (рис. 3.12).

Обозначим через H'_1 позицию наблюдателя относительно объекта поиска, которую ему предстоит занять. Решение задачи в этом случае сводится к сближению вплотную с этой позицией, которая перемещается, естественно, тем же курсом и с той же скоростью, что и объект.

Строим скоростной (H'_1ab) и путевой ($H_0H'_1H_1$) треугольники и получаем графически курс наблюдателя (K_H), это и есть его путь (S_H), что составляет суть графического решения задачи.

Аналитическое решение сводится к отысканию курса сближения K_H и времени сближения $t_{сб}$. Как видно из рисунка,

$$K_H = K_0 + \xi, \quad (3.76)$$

где ξ — угол между курсом наблюдателя и известным ему направлением курса объекта, приводящий на искомый курс сближения K_H . Этот угол можно найти из скоростного треугольника H'_1ab . По теореме синусов

$$\frac{V_0}{V_H} = \frac{\sin [180 - (\xi + q_{00} + \gamma)]}{\sin (q_{00} + \gamma)},$$

где γ — вспомогательный угол.

После некоторых преобразований получаем

$$\xi = \arcsin [(\sin (q_{00} + \gamma))/m] - q_{00} - \gamma. \quad (3.77)$$

Значение $\arcsin$ в формуле (3.77) можно получить по аргументам $q_{00} + \gamma$ и $1/m$ из табл. 1 приложения.

Значение γ определяется из треугольника $O_0H_0H'_1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{H'_1d}{H_0d} = \frac{D \sin \theta}{D_{об} - D_{об} \cos \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{1 - \mu \cos \theta}, \\ \gamma &= \operatorname{arctg} \frac{\mu \sin \theta}{1 - \mu \cos \theta}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

где $\mu = D_{об}/D_0$.

Значения угла $180^\circ - \gamma$, округленные до одного градуса, в зависимости от μ и θ даны в приложении (табл. 3).

Пример 3.3. Наблюдатель находится на курсовом угле объекта $q_{00}=70^\circ$ относительно правого борта на расстоянии $D_0=100$ км, $V_H=60$ км/ч, $V_0=30$ км/ч, $K_0=90^\circ$. Дальность действия средств обнаружения наблюдателя $D_{обH}=75$ км.

Необходимо рассчитать курс наблюдателя, приводящий его к сближению на дальность действия средств обнаружения при значении курсового угла, отсчитываемого от правого борта: $q_{01}=30^\circ$.

Решение. 1. В табл. 3 приложения по $\mu=0,75$ и $\theta=-40^\circ$ находим $180-\gamma=131^\circ$. Следовательно, $\gamma=49^\circ$.

2. В табл. 1 приложения по $q_{00}+\gamma=119^\circ$ и $V_0/V_H=0,5$ находим, что $180-(\xi+q_{00}+\gamma)=26^\circ$. Следовательно, $\xi=35^\circ$.

3. Рассчитываем $K_n = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Время сближения рассчитывается по очевидной формуле

$$t_{сб} = S_p / V_p. \quad (3.79)$$

Значения S_p и V_p находятся из треугольников $O_0H_0H'_1$ и H'_1ab соответственно, по теореме косинуса:

$$S_p = D_0 \sqrt{1 - \mu^2 - 2\mu \cos \theta}, \quad (3.80)$$

$$V_{p1} = V_0 \sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \xi}. \quad (3.81)$$

Расчеты S_p и V_p удобно выполнять с помощью табл. 4 приложения. Таблица дает по аргументам μ или m , а также углам θ или ξ значения корней соответствующих формул.

В примере 3.3 по $\mu = 0,75$ и $\theta = 40^\circ$ из табл. 4 приложения выбираем 0,64. Следовательно, $S_p = 64$ км. По $m = 2$ и $\xi = 35^\circ$ выбираем 1,32. Следовательно, $V_{p1} = 39,6$ км/ч. По формуле (3.79), $t_{сб} = S_p / V_p = 1,62$ ч.

Представляет интерес случай сближения наблюдателя с объектом поиска на дальность действия средств обнаружения, осуществляемого при постоянном значении курсового угла объекта ($\theta = 0$). Анализ формулы (3.78) показывает, что при $\theta = 0$, $\gamma = 0$ и в соответствии с (3.77)

$$\xi = \arcsin((\sin q_{00})/m) - q_{00}$$

или

$$q_{00} + \xi = \arcsin((\sin q_{00})/m).$$

Последняя формула соответствует случаю сближения вплотную (3.71). Следовательно, в данном случае сближению с объектом сопутствует постоянство направления на объект и сохранение неизменным курсового угла наблюдателя. Последний можно рассчитать по табл. 1 приложения. Задача существенно упрощается. Существенно упрощается также и расчет времени маневра. Анализ формулы (3.80) показывает, что при $\theta = 0$

$$S_p = D_0 \sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu} = D_0 - D_{об}. \quad (3.82)$$

В связи с тем, что курсовые углы объекта и наблюдателя остаются неизменными, величину V_p можно рассчитать по формуле, очевидной из рассмотрения скоростного треугольника (рис. 3.11):

$$V_p = V_0 \cos q_0 + V_n \cos q_n. \quad (3.83)$$

И если сближение при постоянном значении курсового угла объекта ведется до величины $D_{об}=0$ (вплотную), то мы приходим к известной формуле (3.75).

Графический метод решения задачи сближения наблюдателя с объектом на дальность действия средств обнаружения ясен из рис. 3.12.

Поскольку при использовании средств обнаружения решающее значение имеет появление объекта поиска в пределах необходимой дальности, особое значение для практики приобретают способы сближения с объектом на $D_{об}$ в кратчайший срок независимо от направления.

Сближение на дальность действия средств обнаружения в кратчайший срок. Общая схема решения данной задачи показана на рис. 3.13.

В исходный момент времени объект поиска и наблюдатель находятся в точках O_0 и H_0 на расстоянии D_0 друг от друга. Предположим, что в момент сближения на дальность обнаружения объект поиска будет находиться в точке O_1 . Опишем около этой точки окружность радиусом $D_{об}$, по которому должен двигаться наблюдатель. Нетрудно заметить, что кратчайшим по расстоянию, а следовательно, и кратчайшим по времени будет курс наблюдателя K_n по направлению H_0O_1 . Действительно, любой другой курс из точки H_0 до пересечения с дугой ab окружности радиусом $D_{об}$ будет длиннее.

Для упрощения расчетов сведем данную задачу к известной задаче сближения с объектом вплотную. Для этого на курсе объекта найдем такую точку, при выходе из которой он встретится с наблюдателем в O_1 вплотную. Этому требованию отвечает точка O'_0 , находящаяся сзади точки O_0 на расстоянии $V_0(D_{об}/V_n)$. Если объект начнет движение из точки O'_0 , то он придет в точку O_0 позже на время $D_{об}/V_n$, т. е. ровно на столько, сколько нужно наблюдателю, чтобы пройти расстояние $D_{об}$. Итак, задача свелась к сближению наблюдателя вплотную с точкой O'_0 .

Графическое решение задачи не отличается от рассмотренного выше для обычного сближения вплотную. Следует только иметь в виду, что графический расчет дает два курса сближения, из которых необходимо выбрать наиболее короткий.

Аналитическое решение также аналогично случаю сближения вплотную. При этом рассматривается сближение вплотную со вспомогательной точкой O'_0 . По фор-

миле (3.71)

$$q'_{н0} = \arcsin((\sin q_{о0})/m). \quad (3.84)$$

С другой стороны, как видно из рис. 3.13,

$$q_{н0} = q_{о0} - \alpha.$$

Интересующая нас для выполнения маневра величина

$$q_{н0} = q'_{н0} - \alpha. \quad (3.85)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию вспомогательного угла α . Значение α найдем из треугольника $O'_0O_0H_0$.

По теореме синусов

$$\frac{V_0 (D_{об}/V_H)}{D_0} = \frac{\sin \alpha}{\sin (q_{о0} - \alpha)}.$$

Решая это уравнение с учетом формул (3.74) и (3.78), получаем

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin q_{о0} - \cos q_{о0} \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(\mu/m) \sin q_{о0}}{1 + (\mu/m) \cos q_{о0}}. \quad (3.86)$$

Значения α , округленные до одного градуса, в зависимости от μ/m и $q_{о0}$ даны в приложении (табл. 5).

Пример 3.4. В условиях примера 3.3 ($q_{о0}=70^\circ$ правого борта, $D_0=100$ км, $V_H=60$ км/ч, $V_0=30$ км/ч, $K_0=90^\circ$) необходимо рассчитать курс наблюдателя, следуя которым, он сблизится с объектом на $D_{об}$ (D_0+75 км) в кратчайший срок.

Решение. 1. В табл. 5 приложения по $m/\mu=2,67$ и $q_{о0}=90^\circ$ находим $\alpha=17^\circ$.

2. В табл. 2 приложения по $V_0/V_H=0,5$ и $q'_{о0}=53^\circ$ находим $q'_{н0}=23^\circ$.

3. $q_{н0}=6^\circ$ левого борта.

4. $\xi=180-(q_{о0}+q_{н0})=104^\circ$, $K_H=K_0-104=346^\circ$.

Заметим, что отклонение от первоначального направления на объект $55-346=69^\circ$ значительно меньше по сравнению с примером 3.3.

Найдем далее время маневра сближения с объектом на дальность действия средств обнаружения в кратчайший срок. Воспользуемся для этого общими формулами (3.79) — (3.81), имея в виду, что в данном случае $\Theta=q_{о1}-q_{о0}=q_{н0}=6^\circ$.

Из табл. 4 приложения выбираем по $\mu=0,75$ и $\theta=6^\circ$ $S_p=27$ км а также по $m=2$ и $\xi=104^\circ$ — $V_p=73$ км, $t_{сб}=0,37$ ч. Очевидно, что срок сближения на дальность обнаружения сокращен по сравнению с примером 3.3 в 4,4 раза ($1,62/0,37$).

Сближение на минимальную дальность обнаружения. Поскольку эффективность существующих средств обнаружения обычно повышается с приближением наблюдателя к цели, то практический интерес представляет задача сближения с целью на возможно меньшую дальность $D_{об\ min}$.

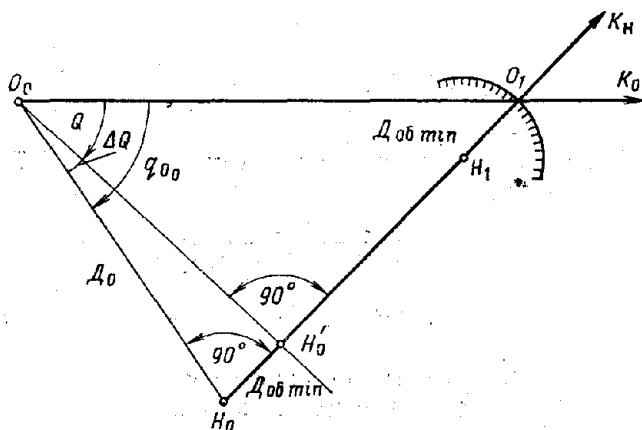


Рис. 3.14. Сближение на минимальную дальность обнаружения.

Данная задача имеет смысл лишь при условии $V_n < V_0$ и $q_0 > Q$, так как при достижении наблюдателем преимущества в скорости или же при расположении его в пределах критического курсового угла объекта, он может сократить дистанцию до любой величины (вплоть до нуля).

Для расчета маневра сближения на минимальную дальность обнаружения и определения величины $D_{об\ min}$ рассмотрим рис. 3.14.

Рисунок показывает, что курс K_n , перпендикулярный внешней стороне критического курсового угла, приведет наблюдателя на минимально возможную дальность обнаружения объекта поиска при условии, что наблюдатель находится в точке H_0 . А так как кратчайший путь из H_0 в H'_0 соответствует тому же курсу K_n , перпенди-

кулярному O_0H_0 , то, очевидно, этот курс и является искомым.

Из рассмотрения рис. 3.14 ясно также, что интересующая нас величина $D_{об\ min}=H_0H'_0$; любой другой путь из точки H_0 до границы критического курсового угла будет больше.

Для поворота на курс K_H необходимо найти значение $q_{но}$. Из треугольника $O_0H_0H'_0$ следует:

$$q_{но}=90^\circ - \Delta Q = 90^\circ - (q_{оо} - Q); \quad (3.87)$$

$$D_{об\ min}=D_0 \cos q_{но}. \quad (3.88)$$

Время сближения рассчитывается по формуле

$$t_{сб} = \frac{H_0H_1}{V_H} = \frac{D_0 \cos \Delta \operatorname{tg} Q}{V_H} = \frac{D_0 \cos (q_0 - Q) \operatorname{tg} Q}{V_H}. \quad (3.89)$$

Пример 3.5. Сохраняя основные условия примера 3.3 ($q_{оо}=70^\circ$, отсчитываем от правого борта; $D_0=100$ км, $V_0=30$ км/ч), примем, что скорость наблюдателя упала до $V_H=15$ км/ч. Необходимо рассчитать курс наблюдателя (или, что то же самое, его $q_{но}$), следуя которым он сближится с объектом на минимально возможную дальность обнаружения, а также величину $D_{об\ min}$ и время сближения.

Решение. 1. По формуле (3.87), с учетом того, что $Q = \arcsin (15/30) = 30^\circ$; $q_{но}=50^\circ$ левого борта.

2. По формуле (3.88) $D_{об\ min}=100 \cos 50^\circ=64,3$ км.

3. По формуле (3.89) $t_{сб}=2,9$ ч.

Решение задачи сближения на $D_{об}$ ясно из рис. 3.14.

На практике может возникнуть задача, обратная только что рассмотренной: возможно ли сближение на $D_{об}$ при данном положении наблюдателя относительно объекта и известных скоростях их движения?

Решение этой задачи вытекает из анализа рис. 3.14. Если в исходный момент наблюдатель находится в пределах курсового угла цели $q_{оо}=Q+\Delta Q$, то сближение на $D_{об}$ возможно, если за пределами указанного угла, то невозможно. Этот курсовой угол называется предельным курсовым углом цели:

$$q_{оо\ пр}=Q+\Delta Q, \quad (3.90)$$

где $Q=\arcsin (V_H/V_0)$; $\Delta Q=\arcsin D_{об}/D_0$.

Так, в примере 3.5 для $D_0=64,3$ км $Q=30^\circ$, $\Delta Q=40^\circ$, $q_{оо\ пр}=70^\circ$. Это означает, что для сближения наблюдателя с объектом поиска на $D_{об}=64,3$ км необходимо, чтобы он находился в преде-

лах курсового угла объекта 70° . Если наблюдатель находится точно на границе этого курсового угла (пример 3.5), то $D_{об} = 64,3$ км — это минимально возможная дальность, на которую может сблизиться наблюдатель с объектом. Если наблюдатель находится внутри этого угла, то возможно сближение и на меньшие дистанции, а если вне, то сближение на эту дистанцию невозможно.

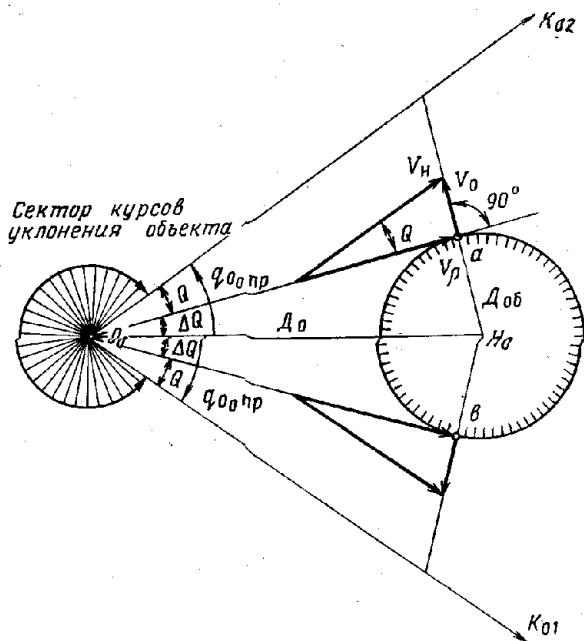


Рис. 3.15. Уклонение объекта поиска от тихоходного наблюдателя.

Уклонение объекта поиска от сближения с наблюдателем. В тех случаях, когда объект поиска стремится избежать сближения с наблюдателем на дальность действия его средств обнаружения, он производит маневр уклонения.

Выводы из формул (3.71) и (3.75) позволяют утверждать, что маневр уклонения имеет смысл лишь в том случае, когда наблюдатель 1) знает местоположение, скорость и направление движения объектов поиска, но не обладает преимуществом в скорости и находится за пределами критического курсового угла объекта; назовем этого наблюдателя тихоходным; 2) не знает место-

(точка a), строятся два треугольника скоростей. Для этого из точки a , по направлению, соответствующему курсу наблюдателя K_N , откладывается вектор его скорости (V_N) и из конца его делаются две засечки линии O_0a . Места засечек: точки b и c — дают начало двум векторам относительной скорости (V_{p1} и V_{p2}), а также двум векторам скорости объекта поиска (V_{o1} и V_{o2}). Последние два вектора и дают искомые курсы объекта, следуя

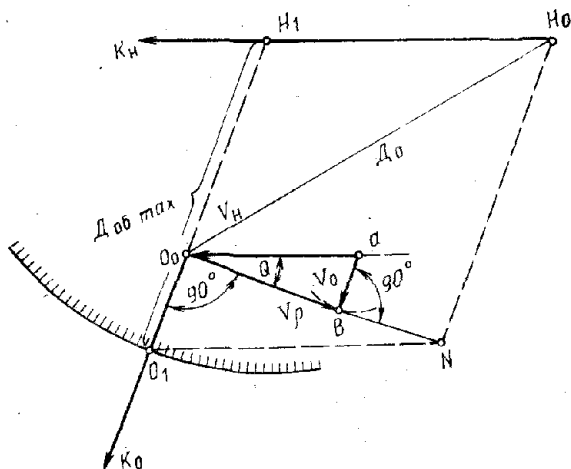


Рис. 3.17. Уклонение объекта поиска от наблюдателя на максимальную дальность обнаружения.

которыми он не попадает внутрь круга радиусом $D_{об}$ при точке N_0 . Перенеся эти курсы в точку O_0 , получаем сектор курсов уклонения объекта $K_{o1}O_0K_{o2}$ (по часовой стрелке). Располагая свои курсы в пределах указанного сектора, объект при данном курсе наблюдателя сможет избежать сближения с ним на дальность, меньшую чем $D_{об}$.

При расчете уклонения от быстроходного наблюдателя у объекта может возникнуть необходимость не просто избежать попадания в круг радиусом $D_{об}$, а разойтись с наблюдателем на максимально возможной дальности обнаружения $D_{об\max}$.

Графический прием решения данной задачи показан на рис. 3.17. Для лучшей реализации своих возможностей, как уже было показано, объект поиска должен

лечь на курс, перпендикулярный стороне критического курсового угла. Построение такого курса и показано на рисунке. В точке O_0 строится скоростной треугольник, для чего из начала вектора скорости наблюдателя (он нам известен) проводится касательная к дуге окружности радиусом V_0 с центром в начале вектора скорости наблюдателя (точка a). Как видно из рисунка, при таком построении угол треугольника скоростей между его

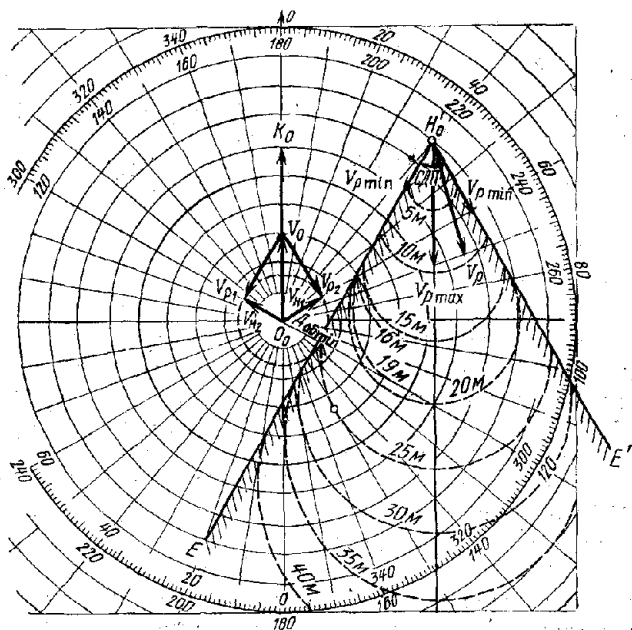


Рис. 3.18. Построение сектора доступных позиций.

сторонами V_H и V_p оказывается равным Q ($\sin Q = (V_0/V_H)$), а направление курса объекта — перпендикулярным стороне этого критического угла.

Проводя из O_0 линию курса объекта поиска (K_0), соответствующую направлению вектора V_0 , получим курс уклонения, обеспечивающий максимальное расхождение объекта с наблюдателем на максимальной дальности.

Величину $D_{об max}$ можно найти с помощью следующего построения. Из точки H_0 проводится линия H_0N ,
10*

параллельная курсу объекта поиска, до пересечения с продолжением линии O_0 в точке N . Проведя из точки N линию, параллельную курсу наблюдателя, в точке пересечения ее с курсом объекта, получим точку O_1 — место объекта в момент расхождения с наблюдателем на $D_{об\ max}$. Место наблюдателя при этом должно быть прямо по корме у объекта в точке N_1 . Расстояние O_1N_1 и есть искомая величина $D_{об\ max}$. Правомерность сделанного построения подтверждается пропорциональностью путей, пройденных объектом и наблюдателем с соответствующими скоростями ($\Delta O_1O_0N \sim \Delta O_0ab$).

Анализ возможностей сближения наблюдателя с объектом поиска на дальность обнаружения. Анализ возможностей уклонения объекта поисков. Для анализа возможностей сближения наблюдателя с объектом поиска, а также уклонения последнего необходимо от начальной позиции наблюдателя N'_0 (рис. 3.18) провести линии N'_0E и N'_0E' , параллельные касательным, проведенным из конца вектора скорости объекта O_0 к скоростной окружности наблюдателя. Как бы ни перемещался теперь наблюдатель, на какой бы курс он ни лег, вектор относительной скорости и линия относительного перемещения всегда будут направлены внутрь сектора EN'_0E' , в котором расположены все возможные позиции перемещения наблюдателя. Сектор получил название сектора доступных позиций (СДП). Из условий построения СДП следует, что он равен двум критическим курсовым углам Q .

При наличии такого сектора мы можем оценить возможности наблюдателя по сближению с объектом поиска визуально. Например, для ситуации, изображенной на рис. 3.18, можно сказать, что: сближение вплотную (сокращение дистанции до нуля) невозможно; минимальная дистанция обнаружения, на которую наблюдатель может сблизиться с объектом, $D_{об\ min} = 14$ км (масштаб планшета: расстояния между окружностями равны 1 км); размещение позиций наблюдателя по левому борту объекта поиска возможно лишь на дистанциях обнаружения, больших, чем 27 км и т. д.

Однако построение такого сектора доступных позиций не дает полной количественной картины ожидаемого маневра. Это объясняется отсутствием временных характеристик предполагаемого маневра, что исключает возможность оптимизировать маневрирование примени-

тельно к решаемым задачам. Поэтому необходимо рассмотреть временную оценку взаимного перемещения наблюдателя и объекта поиска.

В начале маневра позиция наблюдателя относительно объекта находится в точке H'_0 . В ходе маневра эта позиция будет перемещаться в пределах СДП с относительной скоростью V_p .

Как видно из рис. 3.18, относительная скорость перемещения наблюдателя — величина переменная. Максимального значения она достигает при перемещении по биссектрисе сектора доступных позиций, минимально-

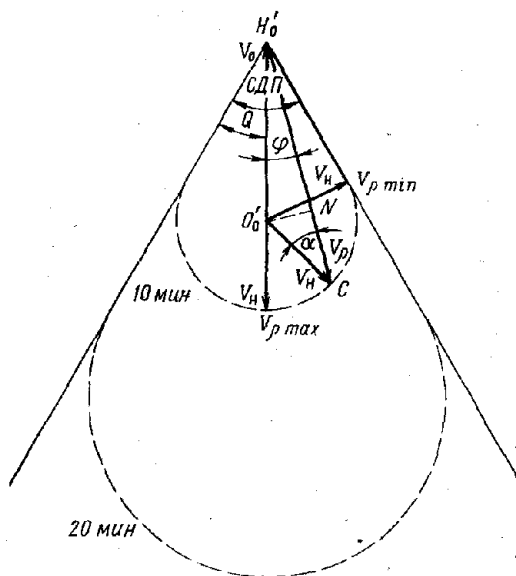


Рис. 3.19. К расчету изохрон сектора доступных позиций.

го — при перемещении по его границам. Построение соответствующих скоростных треугольников, представляющее увеличенное изображение СДП, показано на рис. 3.19.

Из рисунка видно, что по истечении времени, соответствующего принятой единице измерения скоростей, позиции перемещения наблюдателя будут располагаться на некоторой кривой линии (пунктирная), симметричной

относительно $V_{\text{рmax}}$. Эта кривая является изохронной, (линией равного времени).

Сетка изохрон строится графически, как показано на рис. 3.19. При этом от начальной позиции наблюдателя по биссектрисе СДП откладывается в масштабе путь объекта поиска за единицу времени (в данном случае за 10 мин) — отрезок $H'_0 O'_0$. Затем из точки O'_0 радиусом, равным пути наблюдателя за это же время, проводится окружность (пунктир). Это и есть первая изохрона, на которой будут расположены все относительные позиции наблюдателя по прошествии 10 мин от начала маневра. Аналогично находятся и все остальные изохроны.

На рис. 3.18 и 3.20 показана сетка изохрон для начальной позиции наблюдателя на расстоянии $D_0 = 80$ км и по направлению $\Pi_0 = 40^\circ$ от объекта поиска. Масштаб расстояний между изохронами выбран в соответствии с масштабом планшета. В данном случае масштаб по расстояниям равен 10 км в одном кольце, а по скоростям 1 км/мин в одном кольце планшета. Этому масштабу и соответствует временная оцифровка изохрон. Для удобства работы она сделана через 5 мин.

Полученная сетка изохрон представляет собой поле потенциалов предстоящего маневра наблюдателя. Анализируя эти потенциалы, можно оценить возможности любого необходимого маневра наблюдателя по сближению с объектом поиска на $D_{об}$ визуально.

Кроме того, с помощью сетки изохрон можно найти необходимое маневрирование объекта по уклонению. В начале рассмотрим пример оценки возможностей сближения наблюдателя с объектом на дальность обнаружения.

Пример 3.6. Наблюдатель находится по отношению к объекту поиска по пеленгу $\Pi_0 = 40^\circ$ на дистанции $D_0 = 80$ км. Скорость объекта $V_0 = 180$ км/ч, скорость наблюдателя $V_n = 90$ км/ч (рис. 3.18).

Необходимо определить возможность сближения наблюдателя с объектом на дальность обнаружения $D_{об} = 30$ км в кратчайший срок.

Решение. Изохрона, касательная к окружности планшета, соответствующей $D_{об} = 30$ км, показывает возможность выполнения данного маневра и его время $t_{об} = 16$ мин.

Далее рассмотрим пример оценки возможности уклонения объекта поиска от сближения с наблюдателем на $D_{об}$.

Пример 3.7. В условиях примера 3.6 определить предельный курс уклонения объекта поиска для исключения возможности со-

крашении дистанции обнаружения его наблюдателем до $D_{об}=0$. Каково предельное время этого маневра?

Решение. Данная ситуация показана на рис. 3.20. Левая граница сектора доступных позиций должна в этом случае проходить через местоположение объекта — точку O_0 . При этом курс объекта, параллельный биссектрисе сектора доступных позиций, будет курсом уклонения — $K_0=10^\circ$. Время маневра сближения вплотную определяется изохроной, проходящей через точку Q_0 , и равно $t_{сб}=31$ мин.

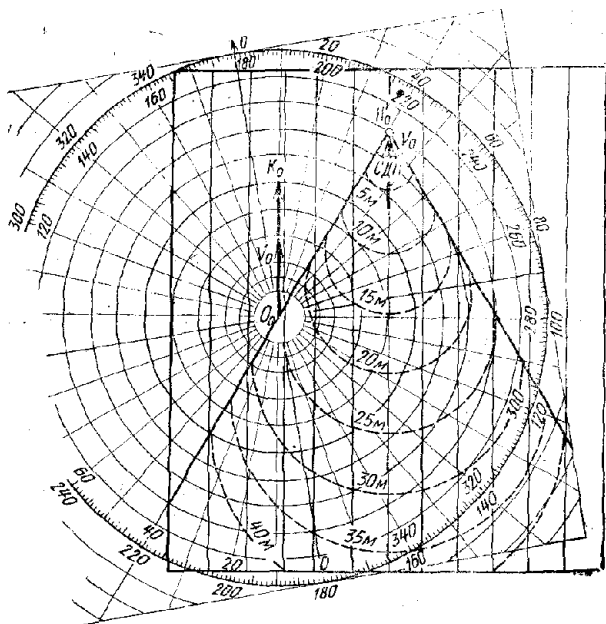
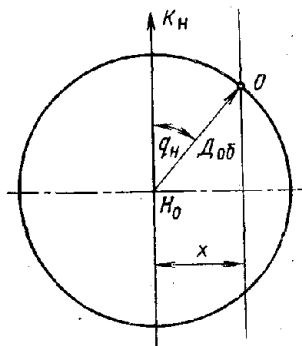


Рис. 3.20. К решению примера 3.7.

Для удобства решения задач по расчету маневра уклонения объекта можно нанести сектор доступных позиций и изохроны на кальку. Совместив вершину угла СДП с позицией наблюдателя и развернув кальку необходимым образом (в данном случае так, как показано на рис. 3.20), получим все необходимые данные. Линии, параллельные биссектрисе СДП, позволяют проложить курс объекта.

3.3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ПОИСКА В ПРЕДЕЛАХ ДАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ СРЕДСТВ ОБНАРУЖЕНИЯ (СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ)

Вероятность появления неподвижных объектов с различных направлений относительно наблюдателя. В процессе поиска объект может либо перемещаться, либо



оставаться неподвижным. Отсутствие перемещения объекта можно рассматривать как частный случай его движения, скорость которого равна нулю. Начнем с этого более простого случая.

Предположим, что наблюдатель (H_0), ведущий поиск, движется с постоянной скоростью V_H и курсом K_H . В этом случае будут обнаружены все объекты, попавшие в круг радиуса действия средства обнаружения $D_{об}$. Назовем этот круг зоной обнаружения (рис. 3.21).

Рис. 3.21. К определению вероятности появления неподвижного объекта поиска с различных направлений.

Полагая, что наблюдатель неподвижен, и пользуясь известным законом теоретической механики, можно предположить, что объекты движутся относительно неподвижного наблюдателя.

Предположим, что один из объектов будет перемещаться по линии, проходящей от наблюдателя на расстоянии x , и его обнаружат под курсовым углом q_H .

Будем считать, что распределение объектов в районе поиска подчинено закону равномерной плотности. Расстояние x в момент обнаружения объекта будет при этом случайной величиной, принимающей любое значение в пределах от $-D_{об}$ до $+D_{об}$ (минус приписывается левому борту наблюдателя, а плюс — правому). В свою очередь, курсовой угол q_H зависит от величины x и также является переменной величиной. Эта зависимость определяется формулой

$$x = D_{об} \sin q_H, \quad (3.91)$$

где q_H — угол между курсом наблюдателя и направлением на объект.

Функция распределения $P(q_n)$ случайной величины q_n — вероятность появления объекта поиска в пределах q_n — будет при этом равна

$$(Pq_n) = \frac{D_{об} + x}{2D_{об}} = \frac{1}{2} (1 + \sin q_n). \quad (3.92)$$

Очевидно, что q_n может принимать значения от 0 до 90° левого борта ($-\pi/2$) и от 0 до 90° правого борта ($\pi/2$).

График функции распределения величины q_n показан на рис. 3.22 пунктирной линией.

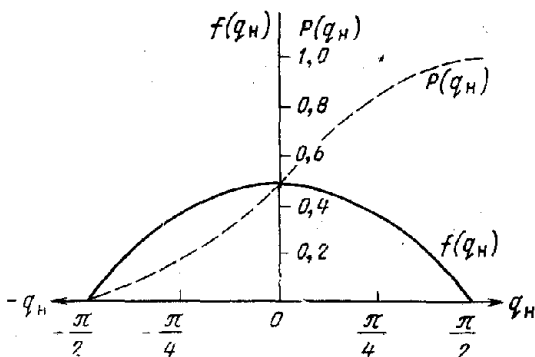


Рис. 3.22. Функция распределения и плотности вероятности появления неподвижного объекта поиска с различных направлений.

Вероятность обнаружения объекта в диапазоне от q_{n1} до q_{n2} определяется выражением, аналогичным (3.92):

$$P(q_{n2} - q_{n1}) = 1/2 (\sin q_2 - \sin q_1). \quad (3.93)$$

Пример 3.8. Необходимо найти вероятность обнаружения объекта поиска:

а) в диапазоне курсовых углов от 90° левого борта до 45° правого борта.

Решение. $P(45^\circ \text{ п. б.} - 90^\circ \text{ л. б.}) = 0,86$;

б) в диапазоне симметричных курсовых углов от 45° левого борта до 45° правого борта.

Решение. $P(45^\circ \text{ п. б.} - 45^\circ \text{ л. б.}) = 0,71$.

Последний расчет показывает, что наблюдение только в этом носовом секторе позволяет обнаружить 71% всех встречающихся объектов.

**Вероятность появления неподвижного объекта
в заданных секторах наблюдения**

Границы секторов, град	Вероятность обнаружения, %	Границы секторов, град.	Вероятность обнаружения, %
10 л. б.—10 л. б.	17	50 л. б.—50 п. б.	77
20 л. б.—20 п. б.	34	60 л. б.—60 п. б.	87
30 л. б.—30 п. б.	50	70 л. б.—70 п. б.	94
40 л. б.—40 п. б.	64	80 л. б.—80 п. б.	98

Данные о вероятности появления неподвижного объекта в заданных секторах наблюдения можно получить из табл. 3.1, рассчитанной по формуле (3.93).

Наглядное представление о вероятности появления неподвижного объекта при заданной величине курсового угла дает график плотности вероятности появления объекта в зависимости от курсового угла.

Выражение для плотности вероятности можно получить, взяв производную от функции распределения. В данном случае

$$f(q_n) = P'(q_n) = 1/2 \cos q_n. \quad (3.94)$$

График плотности вероятности представлен на рис. 3.22 сплошной линией. График наглядно показывает, что в случае поиска неподвижного объекта наибольшую вероятность имеет появление его с направления носовых курсовых углов. Это имеет практическое значение при поиске неподвижных объектов и объектов, имеющих небольшие скорости относительно скорости наблюдателя, ведущего поиск.

Такую же задачу можно решить и в случае перемещения объекта поиска с любой скоростью и любыми курсами.

Вероятность появления подвижных объектов с различных направлений относительно наблюдателя. Предпо-

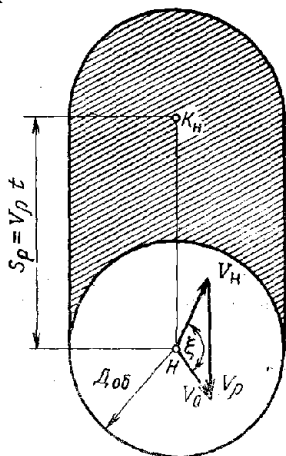


Рис. 3.23. К определению математического ожидания числа обнаружений в единицу времени.

жим, что наблюдатель H (рис. 3.23) движется со скоростью V_H . Его маневр за время t ограничен определенным районом со средней плотностью объектов поиска N_0 , следующих с одинаковой скоростью V_0 . Необходимо определить возможности попадания объектов в зону действия средств обнаружения, представляющую собой круг радиусом $D_{об}$.

Для решения этой задачи построим при точке H векторный треугольник скоростей, предполагая при этом, что все объекты имеют одинаковые курсы, отличающиеся от курса наблюдателя на угол ξ . Если теперь через точку H провести прямую, параллельную вектору скорости V_p , то получим линию относительного пути наблюдателя при данном отношении скоростей наблюдателя и объекта поиска и данном курсе объекта.

Наблюдатель, имея дальность действия средств обнаружения $D_{об}$, за время t обследует площадь, которая на рис. 3.23 заштрихована. Нетрудно видеть, что величина площади, обследованной за время t , равна $2D_{об}S_p = 2D_{об}V_p t$. Иными словами, при абсолютной надежности средств обнаружения за время t будут обнаружены все объекты, расположенные в заштрихованной площади.

Величина этой площади за единицу времени равна $2D_{об}V_p$; при плотности распределения объектов поиска N_0/S_p можно ожидать, что в ней окажется объектов $2D_{об}V_p N_0/S_p$. S_p — конкретная площадь (при определении плотности).

При гипотезе о равномерном распределении курсов объектов поиска от 0 до 2π вероятность того, что разность курсов наблюдателя и объекта поиска будет лежать в пределах от ξ до $\xi \pm \Delta\xi$, равна $\Delta\xi/2\pi$. Следовательно, можно ожидать, что число объектов, сблизившихся с наблюдателем на дальность обнаружения, следующее:

$$\Delta N_0 = \frac{2D_{об}V_p N_0}{2\pi S_p} \Delta\xi, \quad (3.95)$$

а математическое ожидание числа обнаружения объектов, перемещающихся любыми курсами, равно:

$$N_0 = \frac{2D_{об}N_0}{2\pi S_p} \int_0^{2\pi} V_p d\xi. \quad (3.96)$$

Выражение $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p d\xi$ представляет собой среднюю относительную скорость, и преобразуется к виду:

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{V_o^2 + V_n^2 - 2V_o V_n \cos \xi} d\xi. \quad (3.97)$$

Выражение (3.97) не может быть проинтегрировано, поэтому приведем его к виду полного эллиптического интеграла второго рода, предварительно преобразовав подкоренное выражение следующим образом:

$$V_o^2 + V_n^2 - 2V_o V_n \cos \xi = (V_o + V_n)^2 \left[1 - \frac{2V_o V_n (1 + \cos \xi)}{(V_o + V_n)^2} \right].$$

При введении новой переменной $\psi = (\pi - \xi)/2$ и соответственном изменении пределов интегрирования, выражение (3.97) приобретает следующий вид:

$$V_{\text{ср}} = \frac{2(V_o + V_n)}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4V_o V_n}{(V_o + V_n)^2} \sin^2 \psi} d\psi.$$

Обозначив через $K = 2V_o V_n / (V_o + V_n) = \sin \varphi$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p d\xi = \frac{2(V_o + V_n)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi} d\psi.$$

Преобразуя последнее выражение, получаем окончательно

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p d\xi = \frac{2(V_o + V_n)}{\pi} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.98)$$

где $E(k, \pi/2)$ — полный эллиптический интеграл II рода. Значения величин $k_o = (2E(k, \pi/2))/\pi$ приведены в табл. 6 приложения.

Для приближенных расчетов величины $V_{\text{ср}}$ с ошибкой, не превышающей 2—3%, среднюю относительную скорость можно рассчитать по формуле

$$V_{\text{ср}} = \frac{V_o^2 + V_n^2}{V_o + V_n} + 0,3 \sqrt{V_o V_n}. \quad (3.99)$$

Можно также рассчитывать среднюю относительную скорость с помощью приближенного расчета средней относительной скорости поиска:

Отношение большей из скоростей V_o или V_n к меньшей из них (V_o/V_n или V_n/V_o): 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 3,0 4,0 и более;

Отношение средней относительной скорости к большей из скоростей V_o или V_n

($V_{\text{ср}}/V_o$ или $V_{\text{ср}}/V_n$): 1,27 1,18 1,13 1,10 1,08 1,06 1,08 1,00.

Анализ расчета показывает, что если скорость наблюдателя в три и более раз превышает скорость объекта поиска, то с ошибкой, не превышающей 3%, можно принять: $V_{\text{ср}} \approx V_n$.

Математическое ожидание числа обнаружений в единицу времени равно

$$N_o = \frac{4D_{\text{об}}N_o}{\pi S_p} (V_o + V_n) E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = R_V$$

$$= 2D_{\text{об}} \frac{N_o}{S_p} (k_o (V_o + V_n))^2 \quad (3.100)$$

Анализ формулы (3.100) позволяет сделать следующие выводы: 1) среднее число объектов поиска, движущихся любым данным курсом и попадающих в зону действия средств обнаружения наблюдателя, в одинаковой степени зависит как от скорости объектов, так и от скорости наблюдателя; 2) число объектов, попадающих в зону действия средств обнаружения, растет с увеличением упомянутых скоростей, т. е. растет вероятность обнаружения объекта (при постоянной дальности средств обнаружения).

Полученные выводы проиллюстрируем следующим примером.

Пример 3.9. В районе поиска площадью $S_p = 10\,000 \text{ км}^2$ (10^4 км^2) находится $N_o = 20$ объектов, расположенных случайным образом и движущихся со скоростью $V_o = 10 \text{ км/ч}$ в различных направлениях. Скорость наблюдателя $V_n = 15 \text{ км/ч}$, а дальность действия его средств обнаружения $D_{\text{об}} = 25 \text{ км}$.

Необходимо найти математическое ожидание N_o числа обнаруженных объектов в единицу времени — 1 ч.

Решение. 1) В табл. 6 приложения по $V_H/V_0 = 1,5$, находим $K_0 = 0,67$; 2) по формуле (3.98): $V_{\text{ср}} = 16,7$ км/ч; 3) по формуле (3.100): $N_0 = 2 \times 25 \frac{20}{10^4} \times 16,7 \times 1,67$ объектов/ч.

При поиске объектов, курсы которых равномерно распределены в пределах сектора от K_1 до K_2 , т. е. при предельных значениях разностей курсов ξ_1 и ξ_2 , число объектов, попадающих за единицу времени в зону радиуса $D_{\text{об}}$, будет

$$N_0 = \frac{2D_{\text{об}}N}{\pi(\xi_2 - \xi_1)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_p d\xi. \quad (3.101)$$

Эта формула после преобразований, аналогичных рассмотренным выше, принимает вид

$$N_0 = \frac{4(V_0 + V_H)NkD_{\text{об}}}{\pi(\xi_2 - \xi_1)} \left[E\left(k, \frac{\pi - \xi_1}{2}\right) - E\left(k_1, \frac{\pi - \xi_2}{2}\right) \right], \quad (3.102)$$

где $E(k, (\pi - \xi_1)/2)$ и $E(k_1, (\pi - \xi_2)/2)$ — неполные эллиптические интегралы II рода по аргументу k .

Продолжая исследование, определим, какое число объектов, попавших в зону обнаружения, появится при определенной величине курсового угла наблюдателя.

Математическое ожидание числа обнаружений объекта при данной величине курсового угла наблюдателя связано с общим числом обнаружений при всех значениях курсового угла очевидной зависимостью

$$N_0 = \int_0^{2\pi} N_0(q_H) dq_H. \quad (3.103)$$

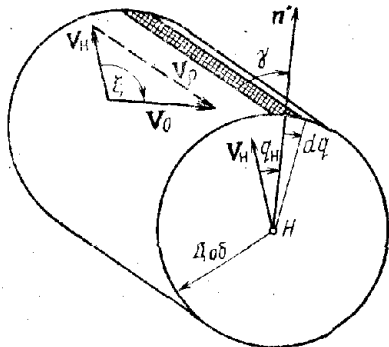


Рис. 3.24. К определению математического ожидания числа обнаружений в единицу времени.

Для определения $N_0(q_H)$ рассмотрим рис. 3.24. Объекты, для которых направление вектора V_p составляет с направлением вектора внешней нормали $\vec{n}$ окружности

угол γ меньше 180° , могут попасть в круг радиусом $D_{об}$ под курсовым углом от q_n до $q_n + \Delta q_n$. Эти объекты находятся в пределах заштрихованной площади величиной $\Delta S = V_p D_{об} \cos \gamma \Delta q_n$. Ее можно выразить через скалярное произведение двух векторов: единичного вектора внешней нормали $\mathbf{n}_o$ и вектора, равного по величине, но с направлением, обратным вектору

$$\mathbf{V}_p : dS = D_{об} (-\mathbf{V}_p \mathbf{n}_o) dq_n.$$

Математическое ожидание числа объектов с относительной скоростью V_p , встреча с которыми в единицу времени происходит под курсовым углом q_n , получим в виде

$$N_o(q_n) dq_n = D_{об} (-\mathbf{V}_p \mathbf{n}_o) \frac{N_k}{S_p} \frac{d\xi}{2\pi} dq_n. \quad (3.104)$$

Число объектов, следующих всеми возможными в пределах от 0 до 2π курсами и в своем относительном движении попадающих в круг радиусом $D_{об}$ под данным курсовым углом q_n , получается интегрированием

$$N_o(q_n) = \frac{D_{об} N_k}{2\pi S_p} \int_0^{2\pi} (-\mathbf{V}_p \mathbf{n}_o) d\xi. \quad (3.105)$$

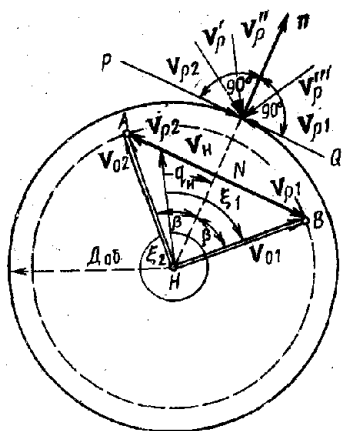
Переходя от относительной скорости V_p к абсолютной и раскрывая значения скалярных произведений векторов, получаем

$$\begin{aligned} -\mathbf{V}_p \mathbf{n}_o &= \mathbf{V}_n \mathbf{n}_o - \mathbf{V}_o \mathbf{n}_o = V_n \cos q_n - V_o \cos(\xi - q_n); \\ N_o(q_n) &= \frac{D_{об} N_k}{2\pi S_p} \int_0^{2\pi} [V_n \cos q_n - V_o \cos(\xi - q_n)] d\xi. \end{aligned} \quad (3.106)$$

При этом интегрирование должно производиться по тем значениям ξ , для которых действительны следующие условия: $[V_n \cos q_n - V_o \cos(\xi - q_n)] \geq 0$ при $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Если $V_n < V_o$, то значения углов ξ , удовлетворяющих этим условиям, можно определить из следующих соображений (рис. 3.25). Объект поиска появляется при значении курсового угла q_n , если все возможные направления вектора относительной скорости лежат в полуплоскости, ограниченной касательной PQ , включающей предельные направления векторов $\mathbf{V}_{p1}$ и $\mathbf{V}_{p2}$.

Рис. 3.25. Схема для определения значений угла ξ при $V_H \leq V_O$.



Соответствующие им направления абсолютных скоростей V_{O1} и V_{O2} и разности курсов ξ_2 и ξ_1 показаны на рис. 3.25. Следовательно, подынтегральная функция положительна при изменении ξ в пределах от ξ_2 до ξ_1 .

Из прямоугольных треугольников HV_HN ; HBN ; HAN

Следует: $\beta = \arccos\left(\frac{V_H}{V_O} \cos q_H\right)$, $\xi_1 = \beta + q_H$; $\xi_2 = 2\pi - \beta + q_H$.

Подставив найденные пределы и выполнив интегрирование, получим:

$$N_O(q_H) = \frac{D_{06} N_k}{\pi S_p} \left[V_H \cos q_H \arccos\left(-\frac{V_H}{V_O} \cos q_H\right) + \sqrt{V_O^2 - V_H^2 \cos^2 q_H} \right]. \quad (3.107)$$

Если $V_H > V_O$ (рис. 3.26), то объект поиска может появиться только при тех значениях курсовых углов, для которых действительны следующие условия:

- а) $-\arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right) \leq q_H \leq \arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$ (дуга BCD);
- б) $\arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right) \leq q_H \leq \arccos\left(-\frac{V_O}{V_H}\right)$ (дуга DE);
- в) $-\arccos\left(-\frac{V_O}{V_H}\right) \leq q_H \leq -\arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$ (дуга AB).

Этим условиям соответствуют разности курсов:

а) $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$; б) $\xi_1 = \arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$;

$\xi_2 = 2\pi - \arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$; в) $\xi_1 = \arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$; $\xi_2 = 2\pi - \arccos\left(\frac{V_O}{V_H}\right)$.

При значениях курсовых углов в пределах

$$\left(-\frac{V_o}{V_H}\right) \leq q_H \leq -\arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right)$$

не может появиться ни один объект, т. е. $N_o(q_H) = 0$.

Подставляя найденные пределы и выполняя интегрирование, будем иметь:

а) при $-\arccos\left(\frac{V_o}{V_H}\right) \leq q_H \leq \arccos\left(\frac{V_o}{V_H}\right)$,

$$N_o(q_H) = \frac{D_{об} N_k}{S} V_H \cos q_H; \quad (3.108)$$

б) при $\arccos\left(\frac{V_o}{V_H}\right) \leq q_H \leq \arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right)$;

в) при $-\arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right) \leq q_H \leq -\arccos\left(\frac{V_o}{V_H}\right)$;

$$N_o(q_H) = \frac{D_{об} N_k}{\pi S_p} \left[V_H \cos q_H \arccos\left(-\frac{V_o}{V_H} \cos q_H\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{V_o^2 - V_H^2 \cos^2 q_H} \right].$$

Это выражение идентично формуле (3.107).

Пример 3.10. Покажем для условий примера 3.9 расчет величины $N_o(q_H)$ при величине курсового угла $q_H = 30^\circ$.

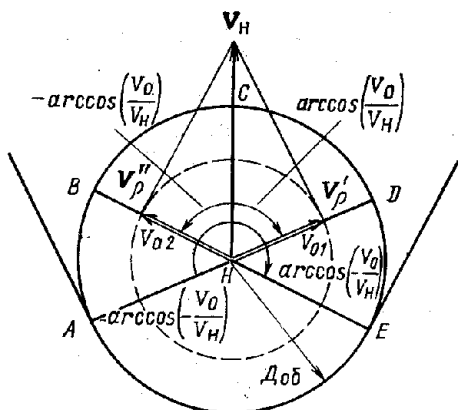


Рис. 3.26. Курсовые углы наблюдателя, на которых возможно появление объектов поиска при $V_H > V_o$.

Решение. 1) Рассчитаем величину $\arccos(V_0/V_H) = 48^\circ$; 2) так как $V_H > V_0$ ($15 > 10$) и $-\arccos(V_0/V_H) < q_H < \arccos(V_0/V_H)$ ($30^\circ - 48^\circ$), воспользуемся формулой (3.108), с помощью которой находим $N_0(30^\circ) = 0,65$.

Плотность вероятности $f(q_H)$ числа встреч, происходящих при заданной величине курсового угла q_H в соответствии с (3.103), определится выражением

$$f(q_H) = N_0(q_H)/N_0. \quad (3.109)$$

Подставляя значение N_0 из формулы (3.100) и значения $N_0(q_H)$ из формул (3.107) и (3.108), получим:

— при $V_H \leq V_0$, а также при $V_H > V_0$ для условий б и в

$$f(q_H) = \frac{V_H \cos q_H \arccos\left(-\frac{V_H}{V_0} \cos q_H\right) + V\sqrt{V_0^2 - V_H^2 \cos^2 q_H}}{4(V_H + V_0) E(k, \pi/2)}; \quad (3.110)$$

— для условия а при $V_H > V_0$

$$f(q_H) = \frac{\pi V_H \cos q_H}{4(V_0 + V_H) E(k, \pi/2)}. \quad (3.111)$$

Анализируя формулы (3.110) и (3.111), можно сделать следующие выводы:

1) плотность вероятности попадания объекта поиска в зону обнаружения при определенной величине курсового угла наблюдателя не зависит от числа объектов в данном районе, а показывает лишь относительную возможность появления их с различных направлений;

2) возможность появления объектов поиска с различных направлений не зависит от абсолютных величин скоростей объекта и наблюдателя, а зависит только от их отношения;

3) возможность появления объектов поиска с различных направлений не зависит от расстояния их появления.

Зависимость плотности вероятности появления объектов поиска с различных направлений от отношения скоростей показана на полярной диаграмме (рис. 3.27), построенной по формулам (3.110) и (3.111).

В одном предельном случае, когда объекты неподвижны, а наблюдатель движется, для $-\pi/2 \leq q_H \leq +\pi/2$ имеем $P(q_H) = 0,5 \cos q_H$, а для $\pi/2 \leq q_H \leq -\pi/2$ име-

ем $P(q_n) = 0$. Это подтверждает сделанный ранее вывод о том, что обнаружение неподвижных объектов возможно в пределах курсовых углов от 0° до $\pm\pi/2$. В этих пределах зависимость $P(q_n)$ косинусоидальная; полярная диаграмма $P(q_n)$ представляет собой круг с наблюдателем на его границе.

В случае перемещения объекта поиска и неподвижности наблюдателя при условии $0 \leq q_n \leq +\pi$ имеем $P(q_n) = 1/2\pi$, т. е. появление объектов с любых направлений равновероятно. Полярная диаграмма $P(q_n)$ при этом представляет собой круг с наблюдателем в центре.

В промежуточных случаях (пока скорость объекта поиска меньше скорости наблюдателя) имеется определенный диапазон курсовых углов наблюдателя, в пределах которых не происходит никаких контактов с объектом. С увеличением скорости объектов возможности их появления с этих курсовых углов также увеличиваются. При $V_o > V_n$ число контактов увеличивается до тех пор,

Таблица 3.2

Плотность вероятности появления объектов поиска (%) с различных направлений относительно наблюдателя в зависимости от отношения их скоростей

Угол, град.	При отношении скоростей V_n/V_o			
	0,67	1,00	1,33	2,00
0	33	39	44	47
10	32	38	43	47
20	31	37	42	45
30	30	34	38	41
40	28	31	33	36
50	25	28	28	30
60	22	24	24	24
70	20	20	19	18
80	17	16	15	12
90	14	13	10	8
100	12	9	7	4
110	10	7	4	2
120	8	4	2	0
130	6	3	1	0
140	5	1	0	0
150	4	0	0	0
160	3	0	0	0
170	3	0	0	0
180	3	0	0	0

пока не станет одинаковым впереди и сзади наблюдателя.

Таким образом, приведенная полярная диаграмма позволяет давать обоснованные рекомендации по организации наблюдения.

Действительно, поскольку вероятность появления объектов поиска при различных курсовых углах наблюдателя неодинаковы, то и интенсивность наблюдения по разным направлениям должна быть разной. Например, при скорости наблюдателя заведомо большей скорости объекта необходимо особо тщательно обследовать секторы с наибольшей вероятностью появления объектов, а не вести равномерное наблюдение по всему горизонту.

Результаты расчетов плотностей вероятности появления объектов поиска с заданного направления можно представить в виде табл. 3.2.

Вероятность появления объектов поиска в заданном диапазоне курсовых углов наблюдателя. Вначале найдем среднее число объектов поиска $N_0(q_H)dq_H$, попадающих за единицу времени в зону обнаружения при курсовых углах наблюдателя от q_H до $q_H + dq_H$. Очевидно, $N_0(q_H)dq_H$ равно произведению числа всех объектов N_0 , попадающих за это время в зону радиуса $D_{об}$ и элементарной вероятности $P(q_H)dq_H$:

$$N_0(q_H)dq_H = N_0 P(q_H)dq_H. \quad (3.112)$$

Из выражения (3.112) находим

$$P(q_H)dq_H = N_0(q_H)dq_H / N_0.$$

Используя формулу (3.100), получаем

$$P(q_H)dq_H = \frac{\pi N_0(q_H)dq_H}{4N_0 D_{об}(V_H + V_0)E(k, \pi/2)}. \quad (3.113)$$

Для расчета вероятности $P(q_{H1} \leq q_H \leq q_{H2})$ появления объекта поиска в заданном диапазоне курсовых углов наблюдателя необходимо проинтегрировать уравнение (3.113) по q_H в пределах от q_{H1} до q_{H2} ($q_{H2} > q_{H1}$):

$$P(q_{H1} \leq q_H \leq q_{H2}) = \frac{\pi}{4N_0 D_{об}(V_H + V_0)E(k, \pi/2)} \int_{q_{H1}}^{q_{H2}} N_0(q_H)dq_H.$$

Ввиду того что функция $N_0(q_H)$ аналитически задается для $V_0 \geq V_H$ и $V_0 < V_H$ раздельно, в дальнейшем будем рассматривать эти два случая также раздельно.

1. $V_o \geq V_H$. Используя формулу (3.107), уравнение (3.113) можно представить в следующем виде:

$$P(q_{H1} \leq q_H \leq q_{H2}) = \frac{V_o}{4(V_H + V_o)E(k, \pi/2)} \int_{q_{H1}}^{q_{H2}} \times \\ \times \left[\frac{V_H}{V_o} \arccos \left(\frac{V_H}{V_o} \cos q_H \right) \cos q_H + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \frac{V_H^2}{V_o^2} \cos^2 q_H} \right] dq_H.$$

Вычисляя полученный интеграл по частям, получаем следующую формулу:

$$P(q_{H1} \leq q_H \leq q_{H2}) = \frac{V_H}{4(V_H + V_o)E(k_1, \pi/2)} \left\{ \sin q_{H2} \arccos \times \right. \\ \times \left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H2} \right) - \sin q_{H1} \arccos \left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H1} \right) + \\ + \frac{2V_o}{V_H} [E(k_1, \varphi_1) - E(k_1, \varphi_2)] - \\ \left. - \frac{V_o^2 - V_H^2}{V_H V_o} [F(k_1, \varphi_1) - F(k_1, \varphi_2)] \right\}, \quad (3.114)$$

где $F(k, \varphi)$ — неполные эллиптические интегралы первого рода; $E(k, \varphi)$ — неполные эллиптические интегралы второго рода; $\varphi_1 = (\pi/2) - q_{H1}$; $\varphi_2 = (\pi/2) - q_{H2}$; $k_1 = V_H/V_o$.

2. Ввиду того что для данного случая функция является кусочно-непрерывной в интервале $0 < q_H \leq \arccos(-V_o/V_H)$; $0 > q_H \geq -\arccos(-V_o/V_H)$, возможны следующие варианты:

а) заданный диапазон курсовых углов находится в пределах, определяемых неравенством

$$-\arccos \frac{V_o}{V_H} \leq q_H \leq \arccos \frac{V_o}{V_H}, \quad (3.115)$$

в этом случае

$$P(q_H < q_H \leq) = \pi V_H \int_{q_{H1}}^{q_{H2}} \cos q_H dq_H / 4(V_H + V_o)E(k, \pi/2) = \\ = \pi V_H (\sin q_{H2} - \sin q_{H1}) / 4(V_H - V_o)E(k, \pi/2); \quad (3.116)$$

б) заданный диапазон курсовых углов находится в пределах, определяемых неравенствами

$$-\arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right) < q_H \leq -\arccos\frac{V_o}{V_H}, \quad (3.117)$$

$$\arccos\frac{V_o}{V_H} < q_H \leq \arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right),$$

при этом

$$\begin{aligned} P(q_{H1} < q_H \leq q_{H2}) = & \frac{V_H}{4(V_H + V_o)E(k, \pi/2)} \times \\ & \times \left\{ \sin q_{H2} \arccos\left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H2}\right) - \sin q_{H1} \times \right. \\ & \times \arccos\left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H1}\right) + 2[E(k_2, \varphi_3) - E(k_2, \varphi_4)] - \\ & \left. - \frac{V_H^2 - V_o^2}{V_H^2} [F(k_2, \varphi_3) - F(k_2, \varphi_4)] \right\}, \quad (3.118) \end{aligned}$$

где $\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H1}\right)$; $\varphi_4 = \arcsin \times$
 $\times \left(\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H2}\right)$; $k_2 = \frac{V_o}{V_H}$;

в) заданный диапазон курсовых углов находится в пределах, определяемых неравенствами

$$0 \leq q_H \leq \arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right), \quad (3.119)$$

$$0 \geq q_H > -\arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right),$$

$$\begin{aligned} P(q_{H1} < q_H \leq q_{H2}) = & \frac{V_H}{4(V_H + V_o)E(k, \pi/2)} \left\{ \sin q_{H2} \arccos \times \right. \\ & \times \left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H2}\right) - \sin q_{H1} \arccos\left(-\frac{V_H}{V_o} \cos q_{H1}\right) + \\ & + 2[E(k_2, \varphi_3) - E(k_2, \varphi_4)] - \frac{V_o^2 - V_H^2}{V_o^2} [F(k_2, \varphi_3) - \\ & \left. - F(k_2, \varphi_4)] + 2\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{V_H^2}} \right\}. \quad (3.120) \end{aligned}$$

По формулам (3.114), (3.116), (3.118) и (3.120) построены графики (рис. 3.28) вероятностей обнаружения объектов поиска в любом заданном диапазоне курсовых

углов наблюдателя для любых значений отношения V_H/V_0 .

Пользуясь графиками, можно определить величину оптимального сектора обследования. Если $V_H/V_0=0,5$, величину сектора обследования можно ограничить 150°

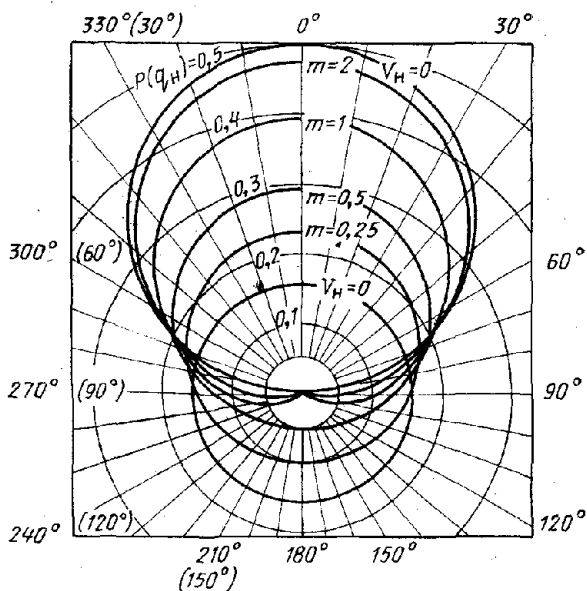


Рис. 3.27. Полярная диаграмма плотности вероятности появления объектов поиска с различных направлений.

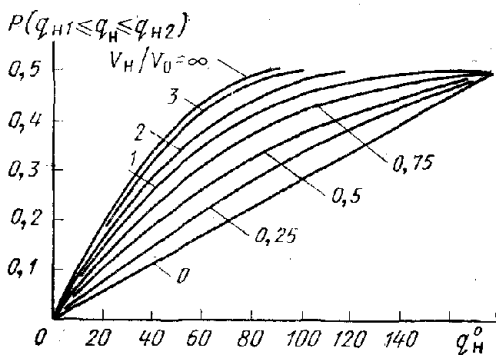


Рис. 3.28. Определения вероятности появления объектов поиска в заданном диапазоне курсовых углов наблюдателя.

Вероятность появления объектов поиска в диапазоне курсовых углов наблюдателя, симметричных относительно направления его движения

$\frac{V_H}{V_0}$	Курсовые углы правого и левого борта, град					
	0—30	30—60	60—90	90—120	120—150	150—180
0	16,7	16,7	16,7	16,7	16,7	16,7
0,25	24,4	22,0	18,2	14,0	11,4	10,0
0,5	30,0	25,0	19,4	12,4	7,4	5,8
1,0	40,6	31,6	17,7	7,9	2,7	0,5
2,0	44,8	32,7	16,2	5,1	1,2	0
∞	50,2	37,1	12,7	0	0	0

с каждого борта наблюдателя, так как дальнейшее увеличение сектора обследования не приводит к существенному увеличению вероятности обнаружения.

Для расчетов вероятности появления объектов поиска в диапазоне курсовых углов, симметричных относительно направления движения наблюдателя, удобно воспользоваться табл. 3.3.

Анализируя таблицу, можно сделать следующие выводы: 1) обнаружение за траверсом неподвижных объектов поиска исключается; 2) появление объектов в зоне обнаружения неподвижного наблюдателя равновероятно при любом значении курсового угла; 3) появление объектов поиска в зоне обнаружения наблюдателя со скоростью, превышающей скорость объектов, на кормовых курсовых углах невозможно или маловероятно.

**Вероятность появления
объекта поиска в зависимо-**

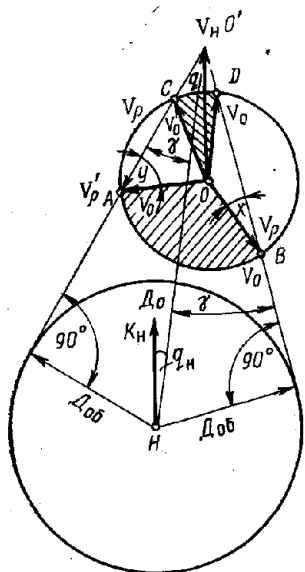


Рис. 3.29. К расчету вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_n > V_0$).

сти от направления и расстояния относительно наблюдателя. Выше рассматривались возможности обнаружения объекта поиска независимо от дальности его появления. Значительный теоретический и практический интерес представляет также определение вероятности появления объекта на определенном курсовом угле и на определенной дальности относительно наблюдателя.

Допустим, что наблюдатель H (рис. 3.29), производящий поиск, движется по линии HK_H со скоростью V_H . Описанная вокруг точки H окружность радиусом $D_{об}$ — это граница зоны обнаружения. Предположим, что объект поиска O находится в некоторый момент времени под курсовым углом q_H на расстоянии D от точки H и имеет скорость V_o .

Построив при точке O треугольники скоростей, определим секторы курсов объекта, которые приводят его в зону обнаружения. При этом векторы относительной скорости V_p должны быть направлены в пределы этой зоны. Секторами благоприятных курсов будут АЦВ и СЦД (на рис. 3.29 эти секторы заштрихованы). Отношение центральных углов, соответствующих благоприятным курсам объекта поиска, к центральному углу, включающему все возможные его курсы, и даст искомую вероятность $P_{появ}$. Таким образом,

$$P_{появ} = \frac{\text{центральный угол благоприятных курсов}}{2\pi}.$$

Для быстрого нахождения $P_{появ}$ удобно воспользоваться графиками равной вероятности появления объектов поиска под любым курсовым углом и с любой дистанции от наблюдателя, построенными для различных отношений скоростей объекта и наблюдателя.

Для построения графиков необходимо вывести уравнения кривых постоянной вероятности для различного отношения скоростей $V_H/V_o = m$.

Рассмотрим вначале случай, когда скорость наблюдателя больше скорости объекта поиска, т. е. $V_H > V_o$ или $m = (V_H/V_o) > 1$ (рис. 3.29), для чего введем следующие обозначения углов: $\angle AO'B = 2\gamma$, $\angle DBO = x$, $\angle CAO = y$ и составим два очевидных тригонометрических уравнения:

$$\frac{\sin x}{V_H} = \frac{\sin (\gamma - q)}{V_o}; \quad (3.121)$$

$$\frac{\sin y}{V_H} = \frac{\sin(\gamma + q)}{V_0}. \quad (3.122)$$

Решим совместно эти уравнения:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \frac{V_H}{V_0} [\sin(\gamma - q_H) + \sin(\gamma + q_H)] = \\ &= 2 \frac{V_H}{V_0} \sin \gamma \cos q_H; \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$(\sin x + \sin y)^2 = 4 \frac{V_H^2}{V_0^2} \sin^2 \gamma \cos^2 q_H.$$

После преобразований и подстановок получим уравнение кривой равной вероятности появления объекта поиска на границе зоны обнаружения ($V_H > V_0$)

$$\begin{aligned} D_{об}^2 \cos^2 q_H - D_0^2 \sin^2 \frac{\pi P_{появ}}{2} \left(\frac{V_0^2}{V_H^2} \cos^2 \frac{\pi P_{появ}}{2} - \right. \\ \left. - \sin^2 q_H + \frac{D_{об}^2}{D_0^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Возможен частный случай, когда одна из секущих окружности радиусом V_0 превратится в касательную к ней, оставаясь направленной в круг зоны обнаружения (рис. 3.30).

При этом характер кривой постоянной вероятности будет определяться только одним из уравнений (3.122):

$$\frac{\sin x}{V_H} = \frac{\sin(\gamma - q_H)}{V_0}.$$

Здесь $P_{появ} = [360 - (180 - 2x)]/2\pi$, поэтому

$$\sin(\gamma - q_H) = \frac{V_0}{V_H} \cos \pi P_{появ}. \quad (3.125)$$

Последнему уравнению соответствует прямая линия равной вероятности, составляющая с направлением движения наблюдателя угол α , равный

$$\alpha = \gamma - q_H \arcsin \left[\left(V_0/V_H \right) \cos \pi P_{появ} \right]. \quad (3.126)$$

Предельный угол наклона линии постоянной вероятности $\alpha_{пр}$ будет, очевидно, при $\cos \pi P_{появ} = 1$, т. е. при $P_{появ} = 0$

$$\alpha_{пр} = \arcsin(V_0/V_H). \quad (3.127)$$

Это выражение есть не что иное, как значение критического угла. Теперь становится понятной сущность критического угла с точки зрения теории вероятностей: он ограничивает площадь с вероятностью появления объекта, обращаясь в нуль за ее пределами. Вероятность появления объекта для различных точек внутри опасного сектора определяется соответствующей линией равной вероятности.

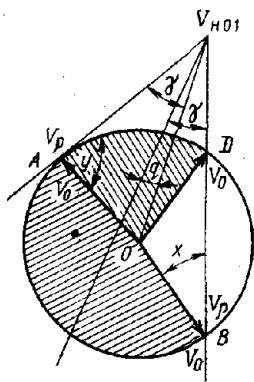


Рис. 3.30. К расчету вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_H > V_0$).

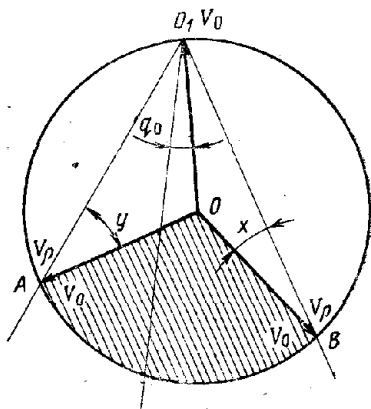


Рис. 3.31. К расчету вероятностей появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_H = V_0$).

В случае равенства скоростей $V_0 = V_H$, $m = 1$ (рис. 3.31) формулы (3.124), (3.126) и (3.127) существенно упрощаются и принимают следующий вид:

$$D_0 = D \operatorname{cosec} \frac{\pi P_{\text{появ}}}{2}; \quad (3.128)$$

$$\alpha = \arcsin (\cos \pi P_{\text{появ}}) = \frac{\pi}{2} (1 - 2P_{\text{появ}}); \quad (3.129)$$

Задаваясь различными значениями $m = V_H/V_0 \geq 1$, с помощью формул (3.124) — (3.129) можно найти отстояния линий равной вероятности (от 0 до 100% через 10%) от наблюдателя, а также углы наклона линий постоянной вероятности к его курсу. В качестве примера на рис. 3.32 приведен построенный таким образом график равной вероятности, соответствующий $m = 1,0$, $D_{00} = 4$ км.

Рассмотрим далее построение графиков равной вероятности для случая, когда скорости объектов поиска больше скорости наблюдателя, т. е. при $V_H < V_0$ ($m = V_H/V_0 < 1$).

Для вывода уравнения линии равной вероятности рассмотрим рис. 3.33. Он отличается от рис. 3.30 тем, что здесь точка O' лежит внутри окружности радиуса V_0 , поэтому все векторы относительного перемещения V_p проходят также внутри этой окружности, не являясь

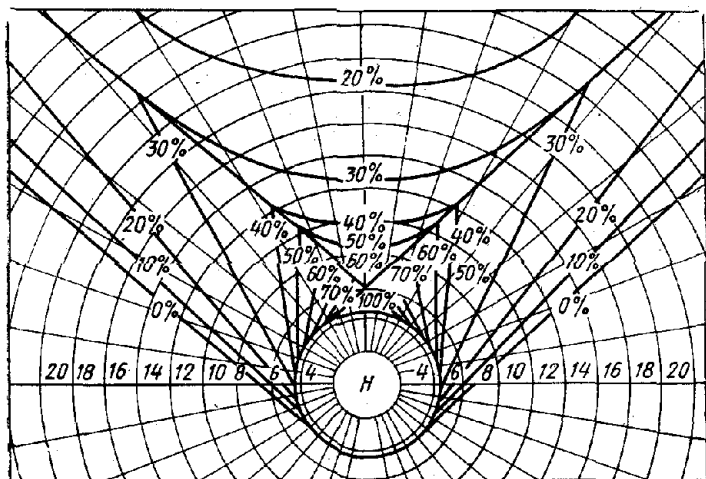


Рис. 3.32. График вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_H = V_0$).

касательными к ней, как это было при $V_H > V_0$. Это означает, что в данном случае не может быть ни одной прямой линии равной вероятности, все они будут замкнутыми кривыми.

Введем обозначения углов: $\angle O'HF = \psi$, $\angle O'BO = x$, $\angle O'AO = y$ и составим два очевидных тригонометрических уравнения:

$$\frac{\sin x}{V_H} = \frac{\cos(\psi + q_H)}{V_0}; \quad \frac{\sin y}{V_H} = \frac{\cos(\psi - q_H)}{V_0}. \quad (3.130)$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \frac{V_H}{V_0} [\cos(\psi + q_H) + \cos(\psi - q_H)] = \\ &= 2 \frac{V_H}{V_0} \cos \psi \cos q_H;\end{aligned}\quad (3.131)$$

$$(\sin x + \sin y)^2 = 4 \frac{V_H^2}{V_0^2} \cos^2 \psi \cos^2 q_H.$$

После преобразований и подстановок получим

$$\begin{aligned}&V_0^2 \sin^2(\psi + \pi P_{\text{появ}}) \cos^2(\psi + \pi P_{\text{появ}}) + \\ &+ V_H^2 \cos^2(\psi + \pi P_{\text{появ}}) - V_H^2 \sin^2 q_H \cos^2(\psi + \pi P_{\text{появ}}) - \\ &- V_H^2 \cos^2 q_H \cos^2 \psi = 0.\end{aligned}\quad (3.132)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение кривой равной вероятности для условия $m < 1$.

В качестве примера приведен график равной вероятности для $m = 0,67$ (рис. 3.34).

Помимо изложенных выше аналитических методов определения вероятностей появления объекта поиска можно предложить более простой графический прием, позволяющий получить вероятность появления объекта для любого диапазона соотношения скоростей V_H/V_0 .

Для этого на планшете в масштабе (рис. 3.35) делается построение, аналогичное изображенному на рис. 3.30; снимается величина центрального

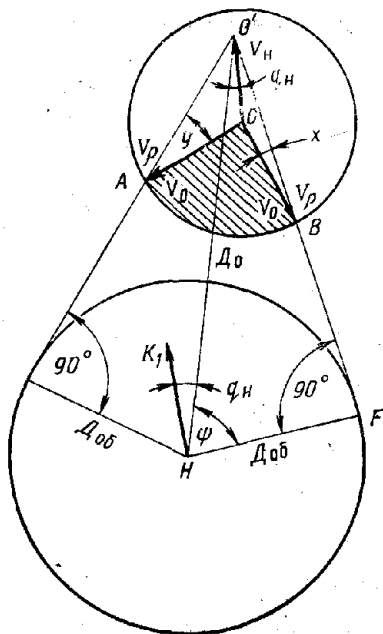


Рис. 3.33. К расчету вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_H < V_0$).

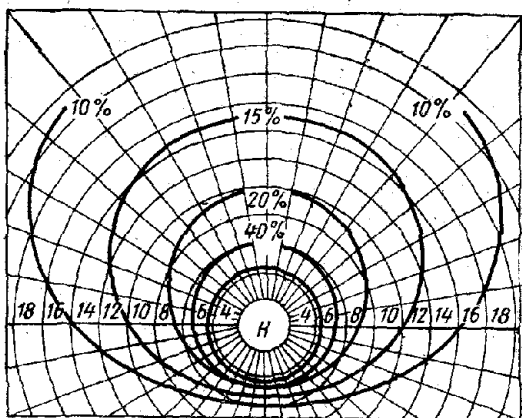


Рис. 3.34. График вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния ($V_H = V_0$).

угла, соответствующего курсам, благоприятным попаданию объектов поиска в зону обнаружения. Отношение этой величины ко всему возможному диапазону изменения курсов объектов и является вероятностью их появления в пределах зоны обнаружения.

Анализ полученных формул вероятности появления объектов поиска при определенной величине курсового угла и дальности от наблюдателя, а также рассмотрение графиков (рис. 3.32 и 3.34) позволяют сделать следующие выводы.

1. Если скорость наблюдателя больше или равна скорости объекта поиска ($V_H \geq V_0$), появление цели на границе зоны обнаружения следует ожидать лишь в пределах некоторого секто-

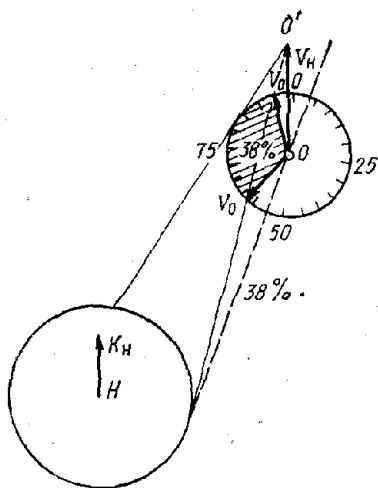


Рис. 3.35. Графический прием расчета вероятности появления объектов поиска в зависимости от направления и расстояния.

ра, вне которого эта вероятность обращается в нуль. Максимальные значения вероятности сосредоточены в районе, расположенном в непосредственной близости от зоны обнаружения, прямо по курсу наблюдателя;

2. Если скорость наблюдается меньше, чем скорость объекта поиска ($V_n \leq V_0$), появление объекта на границе зоны обнаружения следует ожидать с любого направления. Максимальные значения вероятностей имеют место в районе, расположенном в непосредственной близости от зоны обнаружения, прямо по курсу наблюдателя.

Анализ возможностей уклонения объекта поиска от обнаружения. Возможности уклонения объекта поиска от сближения с ним наблюдателя на дальность обнаружения применительно к детерминированной модели поиска были рассмотрены в § 3.2.

В данном параграфе произведен анализ возможностей уклонения объекта для стохастической модели, когда процесс поиска носит случайный характер.

Маневр уклонения состоит в изменении курса и скорости объектом поиска при обнаружении наблюдателя таким образом, чтобы разойтись с ним на расстоянии, превышающем предполагаемую дальность его обнаружения. В дальнейшем будем считать, что объект поиска всегда избирает наивыгоднейший для себя маневр уклонения. Успешность маневра уклонения зависит от очередности обнаружения наблюдателем объекта поиска и наоборот. Если к началу маневра объект уже обнаружен наблюдателем, маневр уклонения теряет смысл. Следовательно, первым необходимым условием успешности уклонения объекта поиска является опережение в обнаружении наблюдателя объектом поиска.

Поскольку при поиске расстояние между объектом и наблюдателем изменяется непрерывно, то в среднем очередность обнаружения зависит от дальности средств обнаружения. При средней дальности обнаружения наблюдателя объектом поиска, меньшей дальности обнаружения объекта наблюдателем, опережение в обнаружении маловероятно; следовательно, возможность уклонения объекта от поиска практически исключена, и ее можно не учитывать.

Если же средняя дальность обнаружения наблюдателя объектом поиска превышает дальность обнаружения объекта наблюдателем, объект может быть обнаружен только в тех случаях, когда в момент обнаружения на-

блюдателя объектом поиска объект находится под такими курсовыми углами наблюдателя, что, как бы объект ни маневрировал, он не может избежать сближения с наблюдателем на дальность $D_{об}$.

Таким образом, вероятность неуклонения объекта поиска ($P_{нук}$) в этих условиях равна вероятности того, что при сближении на $D_{об}$ объект окажется под курсовыми углами наблюдателя, не позволяющими произвести маневр уклонения.

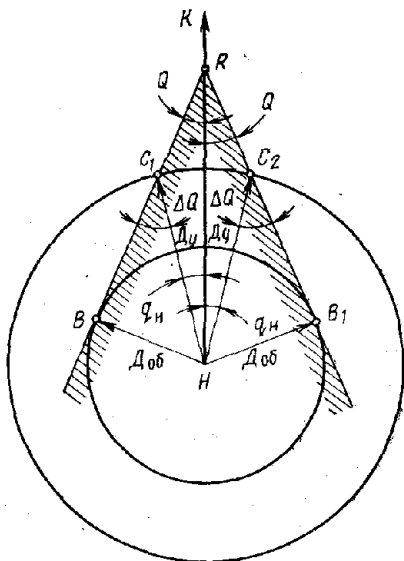


Рис. 3.36. К определению вероятности неуклонения объекта поиска от наблюдателя.

Возможность уклонения объекта поиска зависит не только от соотношения дальностей взаимного обнаружения, но и от отношения скоростей объекта и наблюдателя. Если объект, имея преимущество в дальности действия средств обнаружения, имеет преимущество и в скорости, то в общем случае он всегда сможет уклониться от обнаружения ($P_{нук}=0$). Если же скорость объекта при этом меньше скорости наблюдателя, то величина $P_{нук}$ определяется следующим образом.

На рис. 3.36 заштрихован сектор, ограниченный касательными, проведенными к описанной радиусом $D_{об}$

вокруг наблюдателя окружности и составляющими с линией его курса углы, равные Q (критический курсовой угол). Где бы внутри заштрихованного сектора объект поиска ни находился, избежать сближения с наблюдателем на дальность обнаружения $D_{об}$ он не сможет, поскольку все возможные направления его относительного движения находятся внутри заштрихованного сектора. Следовательно, если к началу маневра уклонения объект

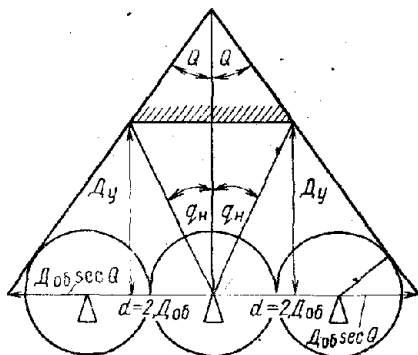


Рис. 3.37. К определению вероятности неуклонения объекта поиска от группы наблюдателей — поисковых судов.

поиска находится под курсовым углом наблюдателя, меньшем некоторой предельной величины q_n , маневр уклонения будет безуспешен. Из треугольника BHR

$$q_n = \Delta Q - Q. \quad (3.133)$$

Как было показано выше,

$$Q = \arcsin \frac{V_o}{V_n}; \quad \Delta Q = \arcsin \frac{D_{об}}{D_y}.$$

Таким образом, искомая вероятность неуклонения объекта поиска равна вероятности того, что при сближении на дальность начала уклонения D_y объект окажется под меньшим, чем q_n , курсовым углом наблюдателя.

Если поиск осуществляется группой наблюдателей, то вероятность $P_{нук}$ можно считать совпадающей с вероятностью того, что в момент начала уклонения все возможные линии относительных перемещений будут проходить внутри фигуры, образованной зонами обнаружения

крайних наблюдателей (рис. 3.37). Как видно из рисунка, этому условию соответствуют значения курсовых углов среднего наблюдателя, не превышающие величины

$$q_n = \arctg \left[\frac{(d/2)(N-1) + D_{об} \sec Q - D_y \tg Q}{D_y} \right], \quad (3.134)$$

где N — число наблюдателей; d — расстояние между наблюдателями.

Для определения вероятности неуклонения объекта поиска от обнаружения, необходимо подставить значение q_n из формул (3.133) или (3.134) в одну из формул для расчета вероятностей появления объектов в пределах определенного диапазона курсовых углов наблюдателя — формулы (3.114), (3.116), (3.118), (3.120).

Упрощенно (пренебрегая различиями вероятностей появления объектов на разных курсовых углах наблюдателей) можно считать вероятность $P_{нвх}$ равной отношению ширины полосы, из которой объект не сможет осуществить маневр уклонения ко всей ширине полосы поиска:

$$P_{нук} = \frac{(d/2)(N-1) + D_{об} \sec Q - D_y \tg Q}{(d/2)(N-1) + D_{об}}. \quad (3.135)$$

Если допустить, что $D_{об} \sec Q \approx D_{об}$, можно получить

$$P_{нук} = 1 - \frac{D_y \tg Q}{(d/2)(N-1) + D_{об}}. \quad (3.136)$$

Если объект поиска находится в полосе, из которой уклонение от попадания в зоны обнаружения наблюдателей невозможно, то он может еще предпринять маневр прорыва линии наблюдения между двумя соседними наблюдателями; успешность этого маневра зависит от расстояния между наблюдателями и от возможных отклонений дальности обнаружения объекта от средней:

$$P_{пр} = \frac{1}{4} \left[1 + \Phi \left(\frac{d/2 - D_{об}}{m_d \sqrt{2}} \right) \right]^2, \quad (3.137)$$

где Φ — знак функции Лапласа; m_d — среднеквадратическая величина возможных отклонений дальности обнаружения объекта поиска наблюдателями от ее среднего значения.

В случае уклонения объекта от обнаружения как выходом из полосы поиска, так и прорывом через линию

наблюдения, вероятность неуклонения $P'_{\text{нук}}$ рассчитывается по формуле

$$P'_{\text{нук}} = P(1 - P_{\text{пр}}). \quad (3.138)$$

Пример 3.11. Поиск осуществляется группой из четырех наблюдателей. Расстояние между наблюдателями $d=8$ км, средняя дальность обнаружения цели $D_{\text{об}}=3$ км, $m_d=1$ км, $V_n=18$ км/ч, $V_o=9$ км/ч. Рассчитать вероятность неуклонения объекта поиска от обнаружения, если $D_y=10$ км.

Решение.

1. $Q = \arcsin(V_o/V_n) = 30^\circ$. 2. По формуле (3.135) $P_{\text{нук}} = 0,64$. По формуле (3.137)

$$P_{\text{пр}} = \frac{1}{4} \left[1 + \Phi \left(\frac{4-3}{1} \right) \right]^2 = 0,71.$$

По формуле (3.138) $P'_{\text{нук}} = 0,19$.

Анализ формул (3.135) и (3.136) показывает, что расчеты имеют смысл при соблюдении условий:

$$V_{\text{оу}} \leq V_n; \quad \arcsin \frac{D_{\text{об}}}{D_y} \geq \arcsin \frac{V_o}{V_n};$$

$$d(N_n - 1)/2 + D_{\text{об}} \sec Q \geq D_y \operatorname{tg} Q.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то вероятность уклонения объекта от поиска близка к единице — объект уклоняется практически всегда.

3.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ОБНАРУЖЕННОГО ОБЪЕКТА ПОИСКА ДАННЫМ КУРСОМ

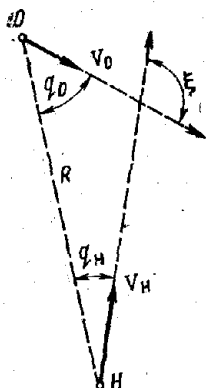
Рассмотрим решение задачи, обратной рассматриваемой в § 3.3: зная направление на объект поиска, определить вероятность движения его каким-либо заданным курсом. Решение этой задачи сводится к следующему.

Предположим, что обнаружение объекта поиска произошло при значении курсового угла q_n (рис. 3.38). Обозначим плотность вероятности того, что угол между курсами объекта и наблюдателя равен ξ , через $Q(\xi)$. Это и будет искомая вероятность движения обнаруженного объекта определенным курсом. Причем величину угла ξ на основании рис. 3.38 можно выразить формулой

$$\xi = \pi \pm q_o \pm q_n, \quad (3.139)$$

где q_n — курсовой угол наблюдателя, взятый со знаком плюс для правого борта и со знаком минус для левого

Рис. 3.38. К определению плотности вероятности движения обнаруженного объекта поиска данным курсом.



борта; q_0 — курсовой угол объекта поиска, взятый со знаком минус для правого борта и со знаком плюс для левого борта.

Очевидно, в общем случае углы ξ лежат в пределах от 0 до 2π . Примем ряд гипотез о том, что эти углы равны $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k$, плотности вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно $P_1(\xi_1), P_2(\xi_2), \dots, P_k(\xi_k)$. Далее, будем считать, что произведен опыт и появилось событие — обнаружение объекта, плотность вероятности появления которого по каждой из гипотез соответственно равна $P_2(\xi_2), \dots, P_k(\xi_k)$. Необходимо определить величины плотностей вероятности гипотез в связи с появлением этого события.

Как известно, решение этой задачи определяется теоремой гипотез по формуле Бейеса:

$$Q_i(\xi_i) = \frac{P_i(\xi_i)P_i(\xi_i)}{\sum_{i=1}^k P_i(\xi_i)P_i(\xi_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.140)$$

где $Q(\xi_i)$ — искомая плотность вероятности равенства угла между курсами объекта и наблюдателя величине ξ_i (плотность вероятности гипотезы после испытания); $P_i(\xi_i)$ — плотность вероятности того, что угол между курсом объекта до его обнаружения и наблюдателем равен ξ_i (плотность вероятности гипотезы до испытания); $P_i(\xi_i)$ — плотность вероятности появления объекта при величине курсового угла, равной q_H (плотность вероятности события по данной гипотезе).

При равномерном распределении курсов объекта поиска и их независимости от положения наблюдателя получим $P_i(\xi_i)d\xi = d\xi/2\pi$.

Величину $P_i(\xi_i)$ можно найти по формуле

$$P_i(\xi_i) = \frac{N_0(q_H)dq_H}{dN_0}, \quad (3.141)$$

где $N_o(q_n)dq_n$ — математическое ожидание числа объектов, курс которых составляет с курсом наблюдателя угол ξ и попадающих в зону действия средств наблюдения под курсовым углом q_n за единицу времени; dN_o — математическое ожидание числа объектов, курс которых составляет с линией курса наблюдателя угол $d\xi$ и попадающих в зону действия его средств наблюдения со всевозможных направлений в единицу времени.

Подставляя в формулу (3.141) в формулу (3.140) соответствующие значения из (3.104) и (3.95), получаем

$$Q_i(\xi_i) = \frac{V_n \cos q_n - V_o \cos(\xi - q_n)}{\int_a^b [V_n \cos q_n - V_o \cos(\xi - q_n)] d\xi}, \quad (3.142)$$

где пределы интегрирования должны быть определены так же, как и в § 3.3, ибо здесь тоже исключаются значения ξ , дающие отрицательные значения подынтегральной функции. В результате имеем, если $V_n \leq V_o$:

$$Q_i(\xi_i) = \frac{1}{2} \frac{\cos q_n - \frac{V_o}{V_n} \cos(\xi - q_n)}{\cos q_n \arccos\left(-\frac{V_n}{V_o} \cos q_n\right) + \sqrt{\frac{V_o^2}{V_n^2} - \cos^2 q_n}}; \quad (3.143)$$

если $V_n > V_o$

$$Q_i(\xi_i) = \frac{1}{2} \frac{\cos q_n - \frac{V_o}{V_n} \cos(\xi - q_n)}{\cos q_n \arccos\left(-\frac{V_n}{V_o} \cos q_n\right) + \sqrt{\frac{V_o^2}{V_n^2} - \cos^2 q_n}}, \quad (3.144)$$

когда $\arccos\left(\frac{V_o}{V_n}\right) \leq q_n \leq \arccos\left(-\frac{V_o}{V_n}\right)$,

или $-\arccos\left(-\frac{V_o}{V_n}\right) \leq q_n \leq -\arccos\left(\frac{V_o}{V_n}\right)$

$$Q_i(\xi_i) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{V_o}{V_n} \frac{\cos(\xi - q_n)}{\cos q_n} \right], \quad (3.145)$$

когда $-\arccos\frac{V_o}{V_n} \leq q_n \leq \arccos\frac{V_o}{V_n}$;

$$Q_i(\xi_i) = 0; \quad (3.146)$$

когда $\left(-\frac{V_o}{V_H}\right) \leq q_H \leq -\arccos\left(-\frac{V_o}{V_H}\right)$.

Рассчитанные по формулам (3.143)–(3.146) таблицы плотности вероятности $Q_i(\xi_i)$ приведены в приложении (табл. 7).

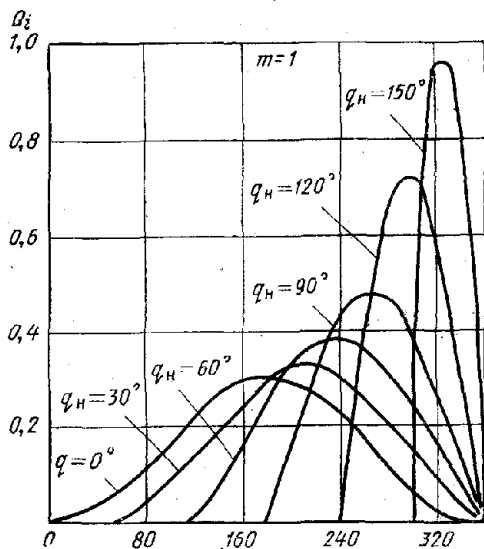


Рис. 3.39. Зависимость Q_i от m , ξ и q_H ($m=1$)

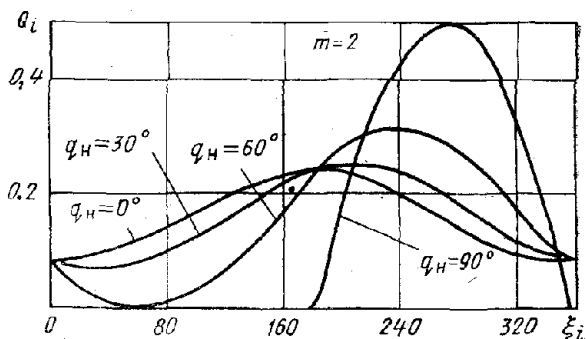


Рис. 3.40. Зависимость Q_i от m , ξ и q_H ($m=2$)

На рис. 3.39—3.41 показаны графики $Q_i(\xi_i)$ для $m=1$; 2 и 10.

Анализ графиков и таблиц позволяет сделать следующие выводы.

1. Плотность вероятности движения обнаруженного объекта поиска данным курсом зависит от m и q_n . С увеличением отношения скоростей m значение $Q_i(\xi_i)$ уменьшается.

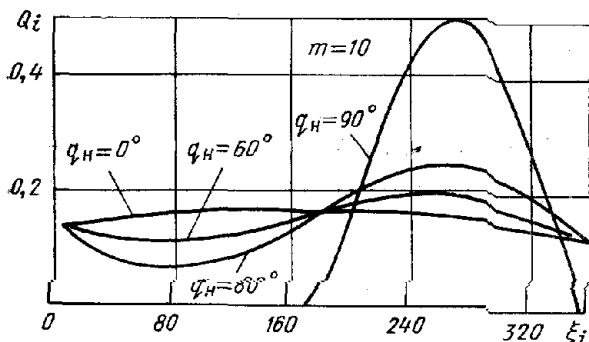


Рис. 3.41. Зависимость Q_i от m , ξ и q_n ($m=10$).

2. Курсовой угол наблюдателя q_n в большей степени влияет на величину $Q_i(\xi_i)$ при $m \geq 1$. С увеличением курсового угла q_n плотность вероятности $Q_i(\xi_i)$ увеличивается при условии, что $m \geq 0,1$. При $m < 0,1$ увеличение q_n практически не влияет на величину $Q_i(\xi_i)$.

Глава 4

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОИСКА

4.1. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОИСКА

Общие требования. Конечной целью поисковых действий является обнаружение определенного объекта, которое можно достигнуть различными способами, неравноценными между собой с точки зрения затраченных усилий и продолжительности поиска.

Из этого следует, что важнейшей задачей теории поиска является не только создание наиболее благоприятных условий для обнаружения, но и разработка наиболее целесообразных способов поиска, обеспечивающих обнаружение в кратчайший срок и с наименьшей затратой сил.

Возникает задача выбора оптимального способа поиска из ряда возможных. Выбор оптимального способа поиска производится на основе определенных показателей успешности — критериев эффективности поисковых действий.

Критерий эффективности при поиске должен отвечать, по мнению зарубежных специалистов, следующим основным требованиям [9].

1. Критерий эффективности должен соответствовать существу производимых расчетов. Например, при расчетах условий поиска до начала его выполнения в качестве критерия естественно взять вероятностную (ожидаемую) его характеристику, например вероятность обнаружения объекта. Если же производить расчеты в ходе или в результате выполнения поиска, то целесообразно пользоваться так называемыми производительными критериями, оценивающими степень реализации поисковых возможностей.

2. Критерий эффективности должен быть связан с обстановкой и конкретной решаемой поисковой задачей. Например, при поиске объектов в данном районе данными поисковыми силами в течение определенного времени в качестве критерия эффективности поиска следует брать вероятность обнаружения или математическое ожидание числа обнаруженных объектов в указанное время (к заданному сроку). Если же задачей поиска является обнаружение объектов в наиболее короткий срок, то в качестве критерия эффективности естественно взять математическое ожидание времени, необходимого для обнаружения объекта.

3. Критерий эффективности должен обладать достаточной полнотой, позволяющей найти ответы на наиболее важные вопросы, возникающие при решении данной поисковой задачи. Например, при предварительных расчетах для поиска недостаточно определить лишь вероятность обнаружения объекта, так как в ряде случаев требуемое количество сил для достижения этой вероятности может оказаться нереально большим. При таких

расчетах целесообразно исходить прежде всего из наличного состава сил, для которых и определяется наилучший в данных условиях способ действий. В качестве критерия при этом имеет смысл взять математическое ожидание числа объектов, обнаруженных данным составом сил к заданному сроку.

4. Критерий эффективности должен быть пригоден для практического использования при расчетах. Это значит, что избранный критерий должен быть понятен (иметь физический смысл), прост и обязательно выражен в количественной форме. Качественные характеристики типа «хороший способ поиска», «быстрое решение задачи поиска», «высокая эффективность при поиске» и тому подобные не могут быть признаны в роли критериев эффективности.

5. Критерий эффективности должен быть доступным для получения его на практике. Например, критерии, имеющие статистическую основу, безупречные с теоретической точки зрения, плохи тем, что их нельзя получить на практике, так как нет необходимого статистического материала.

С точки зрения приведенных требований, все многообразие критериев удобно делить на группы, содержащие соответственно производительные и вероятностные критерии поиска.

Производительные критерии поиска. За основу этих критериев принимают расчетные (теоретические) и реальные (фактические) данные о поиске, характеризующие скорость просмотра площади поиска в единицу времени (производительность поиска). Рассмотрим эту группу критериев.

1. Теоретическая производительность поиска (W_T), равная эффективной ширине поиска ($\Pi_{эф}$), умноженной на относительную скорость при поиске (V_p):

$$W_T = \Pi_{эф} V_p. \quad (4.1)$$

Эта величина позволяет выбрать оптимальную поисковую скорость наблюдателя, т. е. такую, при которой обеспечивается наибольшая производительность поиска и наибольшая теоретическая производительность.

Пример 4.1. При скорости наблюдателя $V_{н1} = 14$ км/ч, $\Pi_{эф1} = 2,4$ км, а при $V_{н2} = 20$ км/ч, $\Pi_{эф2} = 1,8$ км.

Необходимо определить, какая из двух приведенных скоростей является оптимальной.

Решение. Поскольку скорость объекта в обоих случаях принимается одинаковой, можно вести расчет по формуле (4.1), считая, что $V_p \approx V_n$. При этом получим: $W_T = 33,6 \text{ км}^2$ для $V_{n1} = 14 \text{ км/ч}$, $W_T = 36,0 \text{ км}^2$ для $V_{n2} = 20 \text{ км/ч}$.

Несмотря на то, что при V_{n2} эффективная ширина поиска меньше, эта скорость является оптимальной.

2. Реальная или эффективная производительность поиска $W_{эф}$, принимаемая прямо пропорциональной общему числу объектов C , обнаруженных за время поиска, и величине площади района S_p , в котором осуществляется поиск, обратно пропорциональной общей продолжительности поиска t_n и среднему количеству объектов N_o , находящихся в районе поиска:

$$W_{эф} = CS_p / N_o t_n. \quad (4.2)$$

Пример 4.2. Поиск ведется в районе моря площадью $S_p = 60\,000 \text{ км}^2$. Известно, что в этом районе одновременно находится 15 объектов. Поиск в районе производится 20 наблюдателями в течение месяца (30 дней). При этом обнаружено 250 объектов. Необходимо найти реальную (эффективную) производительность поиска.

Решение. Вначале определяем общее время поиска всеми наблюдателями: $t_n = 600$ дней. Затем по формуле (4.2) рассчитываем реальную (эффективную) производительность поиска:

$$W_{эф} = CS_p / N_o T = 1666 \text{ км}^2/\text{день}.$$

3. Отношение реальной производительности поиска к теоретической

$$\eta = W_{эф} / W_T. \quad (4.3)$$

Этот критерий позволяет оценить поиск после его выполнения и характеризует соответствие избранного способа поиска предварительным расчетам.

Пример 4.3. По условиям примера 4.2 определить критерий эффективности поиска η при относительной скорости движения наблюдателя $V_p = 200 \text{ км/день}$ и эффективной ширине полосы обследования $Ш_{эф} = 10 \text{ км}$.

Решение. По формуле (4.1) рассчитываем теоретическую скорость поиска:

$$W_T = Ш_{эф} V_p = 2000 \text{ км}^2/\text{день}.$$

Пользуясь результатами решения примера 4.2, по формуле (4.3) получаем

$$\eta = W_{эф} / W_T = 0,83.$$

Очевидно, чем больше данный критерий эффективности, тем лучше способ действий сил, производящих поиск.

Следовательно, анализируя изменение критерия эффективности η при различных способах выполнения поиска, мы можем установить, какой из них является наилучшим.

Проиллюстрируем это рядом примеров [9, 13].

Известно, что подводные лодки осуществляют поиск торговых судов противника. Приведем таблицу, содержащую фактические (округленные) показатели, входящие в выражение для реальной скорости поиска, имевшие место в ходе боевых действий для двух районов поиска (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Поиск подводными лодками торговых судов [9, 13]

Показатели	Район	
	I	II
Площадь района поиска S_p , км ²	80 000	250 000
Среднее число судов N_o в районе поиска	20	20
Общее время поиска всеми подводными лодками t_n	800	250
Количество обнаружений C судов	400	140
Реальная производительность поиска, $W_{эф}$, км ² /день	2000	7000

Рассчитывая для сравнения теоретическую производительность поиска, примем $Ш_{эф}=30-40$ км; $V_p \approx 200$ км/день. При этом теоретическая производительность поиска будет равна $W_t=6000-8000$ км²/день ≈ 7000 км²/день.

Полученная теоретическая производительность поиска хорошо согласуется с реальной производительностью поиска в районе II, поэтому критерий эффективности поиска $\eta=1$. Это означает, что подводные лодки, действующие в этом районе, практически полностью реализуют здесь свои возможности по обнаружению противника. При этом, видимо, противник в данном районе не может эффективно противодействовать подводным лодкам, осуществляющим поиск.

Что касается района I, то здесь реальная производительность поиска оказалась значительно ниже, чем теоретическая и поэтому критерий эффективности поиска $\eta \approx 0,29$. Следовательно, в районе I

возможности подводных лодок по обнаружению судов противника реализовались далеко не полностью. При анализе причин такого снижения эффективности поиска в районе I было установлено, что противнику удалось организовать достаточно сильное противодействие подводными лодками, в результате чего значительную долю времени им приходилось находиться под водой, не имея возможности использовать средства обнаружения.

В результате такого исследования командование получило возможность принять определенные меры по повышению успешности использования подводных лодок для поиска: перегруппировало подводные лодки в район, где они давали большую эффективность, организовало борьбу с противодействующими противолодочными силами и т. д.

Следующим примером использования критерия эффективности для выбора наиболее целесообразного способа поиска может служить рассмотрение действий самолетов по поиску подводных лодок противника.

Таблица 4.2

Поиск самолетами подводных лодок [9, 13]

Показатели	Районы								
	I			II			III		
	апрель	май	июнь	апрель	май	июнь	апрель	май	июнь
Площадь района поиска S_p , тыс. км ²	300				600			900	
Среднее число подводных лодок в районе поиска N_o	7	7	6	1	4	3	3	7	5
Общее время поиска $t_{п.}$, тыс. ч	20	25	24	6	7	9	5	5	6
Количество обнаруженных подводных лодок C	39	37	30	2	35	14	4	11	9
Реальная производительность поиска $W_{эф.}$, км ² /ч	84	63	63	200	750	311	240	283	270

В табл. 4.2 приведены фактические (округленные) показатели действий противолодочных самолетов в трех различных районах за три месяца, дающие возможность рассчитать реальные производительности поиска.

При расчете теоретической производительности поиска примем $Ш_{эф.}=20$ км; $V_p=150$ км/ч при этом $W_t=3000$ км²/ч. В отличие от предыдущего примера, как видно из табл. 4.2, реальные произ-

водительности поиска здесь весьма существенно отличаются от теоретической производительности. Анализ причин этого расхождения приводит к следующему.

Прежде всего необходимо сделать общий вывод по всем районам и месяцам, в которых производился поиск, о существовании некоторой общей причины снижения эффективности поиска по сравнению с теоретической. Действительно, было установлено, что подводные лодки значительную часть времени проводили под водой, в то время как при расчете теоретической скорости поиска предполагалось, что обнаружение подводных лодок будет осуществляться в надводном положении.

В свете этого становятся понятными существенные различия в реальной производительности поиска в различные месяцы в районе II. Так, стало известно, что в мае подводные лодки вели чрезвычайно активные и смелые действия, задерживаясь для этого значительное время на поверхности, что, в свою очередь, привело к большему числу обнаружений подводных лодок авиацией, вследствие чего реальная производительность поиска в мае поднялась до 750. Однако такие действия подводных лодок вынудили противника усилить мероприятия по противолодочной обороне, что заставило лодки вновь вернуться к более осторожной тактике. Поэтому в июне реальная производительность поиска упала до 311. Все изложенное, однако, не может объяснить столь существенного различия в реальной и теоретической производительности поиска.

Дальнейший анализ, действительно, показал, что десятикратная (в среднем) разница между реальной и теоретической производительностями поиска, имеющая место в районах II, III, объясняется главным образом недостатками в обучении и тренировке наблюдателей самолетов, не имеющих необходимых навыков по длительному

Таблица 4.3

Поиск самолетами подводных лодок в различных зонах района I в апреле [9, 13]

Показатели	Расстояние от берега, мили			
	0—60	60—120	120—180	180—240
Площадь района поиска S_p , тыс. км ²	75	75	75	75
Среднее число подводных лодок в районе поиска N_o	1,75	1,75	1,75	1,75
Общее время поиска t_p , тыс. ч	15,50	3,70	0,60	0,20
Количество обнаруженных подводных лодок, C	21	11	5	2
Реальная производительность поиска $W_{эф}$ км ² /ч	58	128	357	429

поиску подводных лодок в море. Выделение командованием 10% времени на тренировку наблюдателей позволило увеличить эффективность поиска в 2—4 раза. Что касается пятидесятикратного различия в производительностях $W_{эф}$ и $W_{т}$, имеющего место в районе I, то только слабой подготовкой наблюдателей нельзя объяснить его. Так, посылая в район I натренированные экипажи самолетов, существенно повысить эффективность поиска не удалось.

Для дальнейшего анализа причин малой эффективности поиска в районе I площадь района была разбита на примерно равные полосы (зоны), параллельные береговой черте, что дало возможность сравнивать эффективные производительности поиска уже внутри интересующего нас района. В качестве примера можно привести таблицу, содержащую данные о поиске подводных лодок самолетами в различных зонах района I в апреле (табл. 4.3).

При составлении таблицы использовались фактические данные (округленные) по продолжительности поиска и количеству обнаруженных подводных лодок самолетами в различных зонах района I. Поскольку размеры зон выбраны одинаковыми, то и среднее число подводных лодок в каждой из этих зон также принято одинаковым.

Анализ табл. 4.3 раскрывает причину неудач в поиске подводных лодок самолетами в районе I. Эффективность поиска во внутренней (прибрежной) зоне примерно в 8 раз меньше, чем во внешней зоне (в море). Между тем на малопродуктивный поиск подводных лодок в этой зоне затрачивалась большая часть полетного времени ($15,50/20 \approx 75\%$). Во внешней же зоне, где эффективность поиска была максимальной, время поиска составляло лишь около 1% ($0,2/20$). Разница в эффективности поиска получалась за счет того, что лодки чаще находились в подводном положении, чем в надводном. Но это обстоятельство не было учтено, что привело к нерациональному использованию сил при поиске, проявившееся в его низкой реальной производительности. После увеличения продолжительности поиска во внешней зоне эффективность поиска в районе I существенно увеличилась.

Табл. 4.3 показывает, что об эффективности поиска нельзя судить лишь по количеству обнаружений, т. е. сама по себе цифра количества обнаружений еще ни о чем не говорит. Необходима комплексная оценка поиска с различных, наиболее существенных его сторон.

Вероятностные критерии поиска. Эти критерии имеют вероятностную основу и позволяют оценить возможности выполнения поиска еще до его начала. К рассматриваемой группе критериев можно отнести:

1) вероятность обнаружения объекта $P_{об}(t)$ к заданному сроку;

2) математическое ожидание числа объектов $M_{об}$, обнаруживаемых к заданному сроку;

3) математическое ожидание времени $t_{об}$, необходимого для обнаружения объекта.

Вероятность обнаружения объекта к заданному сроку одним наблюдателем в общем виде определяется по формулам (1.13) и (1.14). Расчет вероятности обнаружения при этом сводится к определению потенциала обнаружения U или интенсивности поиска γ .

В случае ведения поиска N_n независимо действующими наблюдателями общая вероятность обнаружения объекта — это вероятность обнаружения его хотя бы одним наблюдателем. Она может быть получена с помощью известной из теории вероятностей формулы

$$P_{об}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N_n} [1 - P_{об i}(t)], \quad (4.4)$$

где $P_{об i}(t)$ — вероятность обнаружения объекта i -м наблюдателем. Или, с учетом того, что

$$\prod_{i=1}^{N_n} [1 - P_{об i}(t)] = \exp \left[- \sum_{i=1}^{N_n} U_i(t) \right],$$

$$P_{об}(t) = 1 - \exp \left[- \sum_{i=1}^{N_n} U_i(t) \right]. \quad (4.5)$$

Последнее выражение показывает, что для получения вероятности обнаружения объекта несколькими наблюдателями достаточно просуммировать их потенциалы обнаружения и подставить полученную сумму в общую формулу (1.13) или (1.14). Это известное нам свойство называется аддитивностью потенциалов.

Теоретический и практический интерес представляет не только величина вероятности обнаружения объекта, но и скорость ее изменения в процессе поиска ($P'_{об}$), представляющая собой производную вероятности обнаружения по времени:

$$P'_{об} = \frac{dP_{об}}{dt} = \frac{d[\exp(-\gamma t_n)]}{dt} = \exp(-\gamma t_n). \quad (4.6)$$

По формуле рассчитан график скорости изменения вероятности обнаружения объектов в зависимости от времени поиска для различных значений γ (рис. 4.1).

Анализ графика показывает, что при больших значениях величины γ скорость изменения вероятности обнаружения объекта резко падает уже в первые часы поиска, и значит, вероятность обнаружения в дальнейшем практически не увеличивается. При малых значениях величины γ скорость изменения вероятности обнаружения в течение длительного времени остается высокой и вероятность обнаружения при дальнейшем поиске продолжает расти.

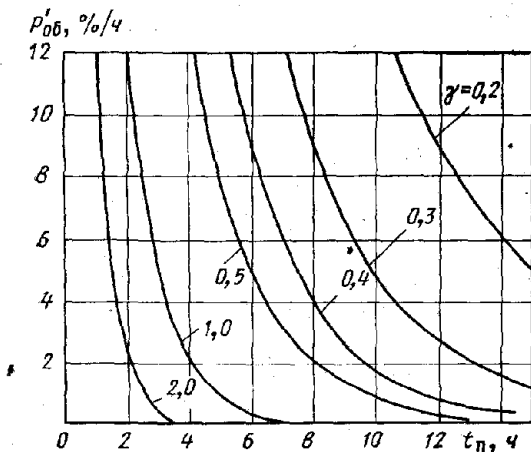


Рис. 4.1. Изменения вероятности обнаружения объекта в процессе поиска.

Наряду с вероятностью обнаружения важным критерием эффективности поиска является математическое ожидание времени $\bar{t}_{об}$, необходимого для обнаружения цели. Два упомянутых показателя неразрывно связаны между собой и, по сути дела, являются различными сторонами одного критерия: вероятность обнаружения показывает степень возможности обнаружения цели в течение заданного времени поиска (к заданному сроку), а математическое ожидание времени, необходимого для обнаружения цели, показывает среднее ожидаемое время, в течение которого возможность обнаружения будет реализована.

Математическое ожидание времени обнаружения объекта при $\gamma = \text{const}$ определяется по формуле (1.33). Величина математического ожидания времени, необходимого для обнаружения объекта, геометрически может

быть интерпретирована как площадь, заключенная между кривой функции $P_{об}(t) = 1 - e^{-u(t)}$, прямой, соответствующей $P_{об}(t) = 1$, и осью ординат, (очевидно из рис. 4.2).

На практике наряду с поиском с постоянной интенсивностью существует также и поиск с возрастающей интенсивностью. Рассмотрим, как будет выглядеть веро-

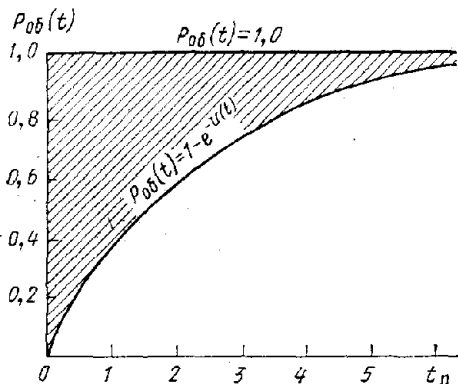


Рис. 4.2. Математическое ожидание времени обнаружения объекта при поиске.

ятность обнаружения и математическое ожидание времени обнаружения при поиске с постоянной и возрастающей интенсивностью.

4.2. РАСЧЕТЫ ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ВРЕМЕНИ ОБНАРУЖЕНИЯ

Поиск с постоянной интенсивностью (интенсивный). Поиск с постоянной интенсивностью (интенсивный) наблюдается в тех случаях, когда наблюдатель случайным образом и многократно просматривает одни и те же места возможного нахождения объекта.

Как было показано в § 1.3, вероятность обнаружения при поиске с постоянной интенсивностью рассчитывается по формуле (1.13) и потенциал обнаружения равен $u = \gamma t_n$. Здесь γ — математическое ожидание числа обнаружений объекта наблюдателем в единицу времени.

Рассмотрим, чему равна величина γ при интенсивном поиске. Будем полагать, что поиск объекта ведется

в районе, площадь которого S_p . Примем также, исходя из наиболее типичных условий интенсивного поиска, что:

- объект достоверно находится в районе поиска;
- распределение вероятных местоположений объекта подчинено закону равномерной плотности — положение объекта равновероятно в любой точке района поиска;
- траектория наблюдателя носит случайный (хаотический) характер — в процессе поиска с одинаковой вероятностью могут обследоваться участки как просмотренные, так и несмотренные; поиск ведется без последствия — вероятность обнаружения цели к определенному сроку зависит только от длительности поиска в расчетное время и не зависит от наличия поиска. Будем также полагать, что цель неподвижна.

Приняв перечисленные условия, можно легко вывести искомое математическое ожидание числа обнаружений цели наблюдателем в единицу времени как отношение площади, просматриваемой наблюдателем в единицу времени, ко всей площади района

$$\gamma = 2D_{об} V_n / S_p, \quad (4.7)$$

где $D_{об}$ — дальность обнаружения объекта наблюдателем.

Например, если мы просматриваем в единицу времени весь район поиска ($2D_{об} V_n = S_p$), то объект поиска достоверно обнаруживается и математическое ожидание числа обнаружений равно одному объекту.

При пользовании формулой (4.7) подразумевается, что попадание объекта поиска в пределы площади обследования тождественно обнаружению объекта. На самом деле это не так. Существует определенная вероятность энергетического контакта с объектом, попавшим в зону действия средства обнаружения. Это так называемая вероятность получения контакта (P_K) .

Следовательно, формула (4.7) верна, когда $P_K = 1$.
При $P_K \neq 1$

$$\gamma = (2D_{об} V_n / S_p) P_K. \quad (4.8)$$

Зависимость интенсивности поиска, потенциала обнаружения и вероятности обнаружения от времени поиска с постоянной интенсивностью показана на рис. 4.3.

График наглядно показывает, что вероятность обнаружения объекта при поиске с постоянной интенсивностью зависит от одного параметра — γ .

Поскольку при интенсивном поиске $t_{об} = 1/\gamma$, то формулу вероятности обнаружения (1.13) можно представить в следующем виде:

$$P_{об} = 1 - \exp(-t_{п}/t_{об}). \quad (4.9)$$

Последнее выражение позволяет выразить вероятность обнаружения с неизвестной интенсивностью поиска γ через $t_{об}$. Эту величину можно получить на практике как среднее время обнаружения конкретного объекта в определенных условиях.

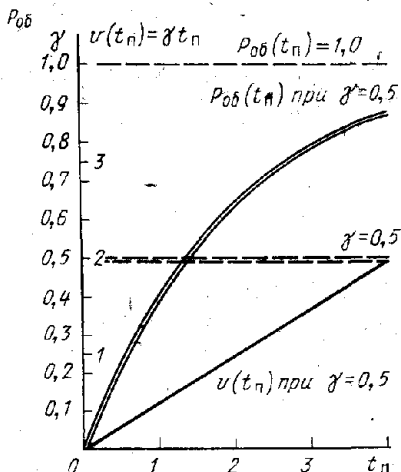


Рис. 4.3. Зависимость интенсивности поиска, потенциала обнаружения и вероятности обнаружения от времени поиска при $\gamma = 0,5$.

Данное обстоятельство является весьма важным, так как позволяет без особых трудностей получать важнейшие показатели успешности поиска. Поскольку на практике фактическая вероятность обнаружения объекта как функция времени может быть и непоказательного типа (например, если интенсивность потока обнаружений не является постоянной), то везде, где это возможно, целесообразно производить приближенную замену ее показательной функцией

$$P_{об}^*(t) \approx 1 - \exp(-\gamma^* t_{п}), \quad (4.10)$$

где γ^* — приближенная интенсивность поиска, определяемая на основании величины математического ожида-

ния времени обнаружения $\bar{t}_{об}$, полученной в результате испытаний.

Поиск с возрастающей интенсивностью (экстенсивный). Поиск с возрастающей интенсивностью (экстенсивный) имеет место в случаях одноразового просмотра наблюдателем возможных мест нахождения объекта. При этом район поиска, как правило, просматривается последовательно от начала до конца.

В этих условиях математическое ожидание числа обнаружений в единицу времени $\gamma(t)$ непостоянно и рассчитывается по следующей формуле, очевидной из геометрических соображений (во избежание повторного обследования):

$$\gamma(t) = 2D_{об}V_n / (S_p - 2D_{об}V_n t_n). \quad (4.11)$$

Подставив в формулу (4.11) значение S_p из формулы (4.8), получим

$$\gamma(t) = \gamma / (1 - \gamma t_n). \quad (4.12)$$

Вероятность обнаружения объекта рассчитывается по формуле (1.14):

$$P_{об}(t) = 1 - \exp \left[- \int_0^{t_n} \gamma(t) dt \right] = \\ = \gamma t_n = \frac{2D_{об}V_n t_n}{S_p}. \quad (4.13)$$

Последнее выражение есть не что иное, как геометрическая вероятность (отношение просмотренной за время поиска площади к площади всего района поиска), величина которой могла быть получена и непосредственно, исходя из характера экстенсивного поиска. При пользовании формулой (4.13) необходимо, однако, учитывать, что при $t_n > 1/\gamma$ район полностью обследован и в этом случае $P_{об} = 1$ при $P_K = 1$.

Математическое ожидание времени обнаружения при экстенсивном поиске находят по формуле, аналогичной (1.33):

$$\bar{t}_{об} = \int_0^{1/\gamma} t_n f(t) dt = \int_0^{1/\gamma} t_n \gamma dt = \frac{1}{2\gamma}. \quad (4.14)$$

Эта формула показывает, что при прочих равных условиях продолжительность экстенсивного поиска до обнару-

ружения объекта в два раза меньше, чем интенсивного поиска: при нем не затрачивается усилий на многократный просмотр одних и тех же участков района поиска.

Однако это обстоятельство не дает оснований считать, что экстенсивный поиск всегда предпочтительнее. Дело в том, что в реальной обстановке, особенно когда объект поиска стремится уйти от обнаружения, однократное обследование каждого участка района может оказаться недостаточным: установив характер маневрирования, наблюдателя, объект поиска будет заходить в те места, которые только что просматривались, особенно при наличии у объекта опережения в обнаружении.

Учет подвижности объекта при расчетах вероятности обнаружения. Учет подвижности объекта при поиске сводится к тому, что объект продолжает считаться неподвижным, а его движение приписывается наблюдателю, скорость которого принимается равной скорости относительного перемещения V_p . Исходя из этого, интенсивность поиска, определяемая по формуле (4.8), равна

$$\bar{\gamma} = (2D_{об}V_p/S_p)P_k. \quad (4.15)$$

Величина относительной скорости, как было показано в § 3.2, находится по формуле (3.6).

Поскольку курс объекта — величина случайная, равновозможная в пределах от 0 до 2π (360°), то в качестве интенсивности поиска следует взять математическое ожидание $\bar{\gamma}$ в указанных пределах:

$$\bar{\gamma} = \int_0^{2\pi} \frac{2D_{об}V_p}{S_p} \frac{d\xi}{2\pi} = \frac{2D_{об}}{2\pi S_p} P_k \int_0^{2\pi} V_p d\xi. \quad (4.16)$$

Последнее выражение не что иное, как математическое ожидание числа обнаружений цели, идущей любым курсом, которое мы получили выше [см. (3.96)]. В данном случае речь идет об одном объекте поиска, поэтому здесь $N_0 = 1$.

Следовательно, в случае поиска подвижного одиночного объекта интенсивность поиска равна

$$\bar{\gamma} = N_0 = \frac{2D_{об}}{2\pi S_p} P_k \int_0^{2\pi} V_p d\xi = \frac{2D_{об}}{S_p} P_k V_{ср}. \quad (4.17)$$

Воспользовавшись далее значением $V_{\text{ср}}$, в соответствии с формулой (3.100) получим

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} = N_0 &= \frac{4D_{\text{об}}}{\pi S_p} P_K (V_{\text{ц}} + V_{\text{н}}) E\left(K, \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{2D_{\text{об}}}{S_p} P_K K_v (V_0 + V_{\text{н}}),\end{aligned}\quad (4.18)$$

Алгоритм подсчета $E(K, \pi/2)$ и K_v , а также приближенные методы получения $V_{\text{ср}}$ изложены в § 3.3.

Вероятность получения контакта с объектом поиска. Необходимость учета вероятности получения контакта, т. е. вероятности установления энергетического контакта с объектом поиска, попавшим в зону действия средства наблюдения, вызвана тем, что обнаружение объекта, как правило, не является достоверным и носит случайный характер. Вероятность получения контакта и является показателем, характеризующим возможность обнаружения объекта в зоне действия средства наблюдения.

Вероятность получения контакта зависит от: средней ожидаемой дальности обнаружения объекта $D_{\text{об}}$; заданного сектора обследования средства наблюдения Ω ; скоростей наблюдателя и объекта; времени обследования заданного сектора наблюдения $T_{\text{обсл}}$.

Считая, что процесс установления энергетического контакта носит пуассоновский характер (поток контактов стационарен, не имеет последствий и ординарен, т. е. является простейшим пуассоновским), используем для расчетов вероятности получения контакта обоснованную в § 1.3 формулу вероятности появления события хотя бы один раз:

$$P_K = 1 - e^{-a}, \quad (4.19)$$

где $a = \gamma t$ — математическое ожидание числа контактов с объектом поиска, попавшим в зону действия средства наблюдения.

По соображениям, изложенным в § 1.3, можно принять, что

$$a = S_{\text{осв}}/S_0, \quad (4.20)$$

где $S_{\text{осв}}$ — площадь, просматриваемая (освещаемая) средством наблюдения за цикл обследования; S_0 — площадь возможного местоположения объекта поиска за период времени, равный циклу обследования.

Под циклом обследования $T_{\text{обсл}}$ понимается промежуток времени, необходимый для обследования заданного сектора наблюдения Ω .

Расчет P_n , таким образом, сводится к определению величин обеих площадей, входящих в выражение (4.20).

Для упрощения решения задачи будем считать, что наблюдатель, производящий поиск, стоит на месте,

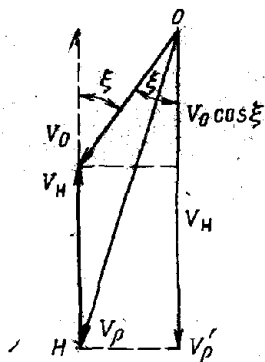


Рис. 4.4. К определению составляющей относительной скорости для расчета вероятности контакта.

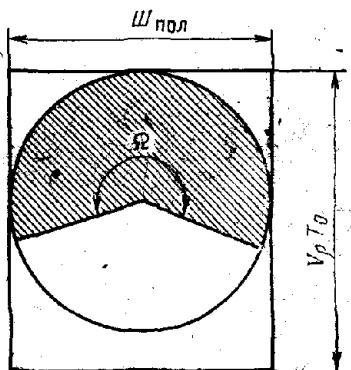


Рис. 4.5. К расчету вероятности получения контакта с объектом поиска.

а объект поиска, попавший в зону обнаружения средства наблюдения, перемещается с относительной скоростью V_p (рис. 4.4).

В рассматриваемой задаче нас будет интересовать, однако, не V_p , а составляющая этого вектора, направленная которой обратно курсу наблюдателя (V'_p). Как видно из рис. 4.4,

$$V'_p = V_n + V_o \cos \xi, \quad (4.21)$$

где V_n и V_o — скорости наблюдателя и объекта поиска соответственно; ξ — угол между курсом объекта и наблюдателя.

Наиболее неблагоприятные условия для обнаружения цели возникают при сближении объекта поиска и наблюдателя контркурсами. При этом $\xi = 0$ и

$$V'_p = V_{p\text{max}} = V_n + V_o. \quad (4.22)$$

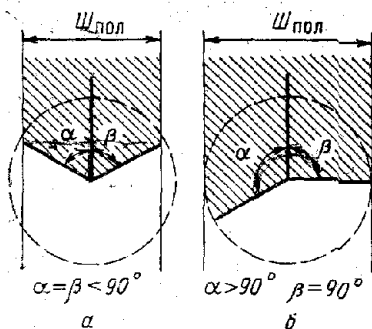


Рис. 4.6. К определению ширины полосы, просматриваемой наблюдателем.

дальности обнаружения, ее можно найти по следующей очевидной формуле (рис. 4.6,а):

$$\text{Ш}_{\text{пол}} \approx \bar{D}_{\text{об}} (\sin \alpha + \sin \beta), \quad (4.24)$$

где α и β — секторы обследования левого и правого борта наблюдателя, например корабля.

Нетрудно убедиться также (рис. 4.6,б), что при $\alpha = \beta \geq 90^\circ$

$$\text{Ш}_{\text{пол}} = 2\bar{D}_{\text{об}}. \quad (4.25)$$

Подставляя соответствующие значения (4.23), получаем

$$S_o = \bar{D}_{\text{об}} (\sin \alpha + \sin \beta) (V_n + V_o \cos \xi) T_{\text{обсл}}. \quad (4.26)$$

Формула упрощается при

$$\alpha = \beta > 90^\circ \text{ и } V'_r = V_{r\text{max}}:$$

$$S_o = 2\bar{D}_{\text{об}} (V_n + V_o) T_{\text{обсл}}. \quad (4.27)$$

Для расчета площади $S_{\text{осв}}$ (4.19) вернемся к рис. 4.6, из которого видно, что $S_{\text{осв}}$ есть не что иное, как площадь кругового сектора, равная

$$S_{\text{осв}} = \pi \bar{D}_{\text{осв}}^2 \Omega / 360. \quad (4.28)$$

Окончательно получим

$$P_k = 1 - \exp \left[-K \frac{\bar{D}_{\text{об}} \Omega}{(V_n + V_o) T_{\text{обсл}}} \right], \quad (4.29)$$

где $K = \pi/2 \cdot 360^\circ \approx 0,00436$.

Пример 4.4. Наблюдатель производит поиск объекта. $V_n = 14$ км/ч, ожидаемая $V_0 = 10$ км/ч, $\bar{D}_{об} = 1,2$ км, $\alpha = \beta = 150^\circ$ ($\Omega = 210^\circ$), $T_{обсл} = 2$ мин (0,033). Требуется определить P_n .

Решение. По формуле (4.29) рассчитываем $P_n = 1 - e^{-1,37} \approx 0,75$.

4.3. УЧЕТ ФАКТОРОВ, ОГРАНИЧИВАЮЩИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОИСКА

Основными факторами, ограничивающими эффективность поиска, являются: недостоверная информация о пребывании объекта в районе поиска; опережение наблюдателя объектом поиска при обнаружении, с последующим уклонением. Рассмотрим их.

Учет возможности недостоверного пребывания объекта в районе поиска. Недостоверная информация о пребывании объекта в районе поиска может быть при неточных данных о времени и районе нахождения объекта и при отсутствии возможности ведения поиска объекта во всем районе в течение всего времени его нахождения в нем.

В рассматриваемом случае вероятность обнаружения является условной, так как рассчитаны в предположении, что объект поиска достоверно находится в заданном районе.

Интересующая же нас вероятность обнаружения объекта поиска при недостоверной информации о пребывании его в районе поиска может быть найдена по формуле полной вероятности

$$P_{об}(t) = [1 - e^{-u(t)}]P_n, \quad (4.30)$$

где P_n — вероятность нахождения объекта в районе поиска.

Формула показывает характер уменьшения вероятности обнаружения объекта при недостоверной информации о его пребывании в районе поиска.

Учет возможности опережения наблюдателя объектом поиска в обнаружении с последующим уклонением. Опережение наблюдателя при обнаружении дает объекту поиска возможность своевременно произвести маневр уклонения и попытаться уйти от сближения на дальность действия средств обнаружения наблюдателя.

С точки зрения эффективности поиска это проявляется в том, что интенсивность поиска — математическое

ожидание числа обнаружений — уменьшается пропорционально вероятности неуклонения цели $P_{\text{нук}}$. Следовательно,

$$\gamma_{\text{оп}} = \gamma P_{\text{нук}}, \quad (4.31)$$

где $\gamma_{\text{оп}}$ — интенсивность поиска объекта, имеющего опережение при обнаружении.

Расчет величины $P_{\text{нук}}$ описан в § 3.3 для равновероятного появления объекта поиска перед любым из наблюдателей. Однако применительно к опережению при обнаружении определенное теоретическое и практическое значение имеет анализ возможностей уклонения объекта при его появлении в любой точке перед любым из наблюдателей, ведущих поиск. Это необходимо при наличии данных о месте объекта в полосе поиска к началу уклонения. Тогда при расчетах вероятности обнаружения нас будет интересовать вероятность выхода объекта из полосы поиска при появлении его перед каждым из наблюдателей ($P_{\text{вых}}$). Покажем, каким образом можно определить эту вероятность.

Будем рассматривать выход объекта из полосы поиска как непрерывный процесс. При этом для данного отношения скоростей V_o/V_n и дальности обнаружения наблюдателя $D_{\text{об}}$ возможность выхода будет зависеть от дальности уклонения D_y и положения объекта относительно поискового строя в момент начала уклонения.

На рис. 4.7 показаны три различные дальности уклонения: D_{y1} , D_{y2} , D_{y3} . При отношении скоростей V_o/V_n выйти из полосы поиска могут объекты, расположенные с внутренней стороны критического курсового угла Q . Исходными позициями их являются точки O_1 , O_2 и O_3 , находящиеся в пересечениях стороны критического курсового угла с дугами соответствующих окружностей радиусов D_{y1} , D_{y2} , D_{y3} .

Определим вероятности выхода объекта в каждом из трех положений.

Для объекта поиска, находящегося в точке O_1 , вероятность выхода, как видно из рисунка, будет равна

$$P_{\text{вых}} = \frac{mn + nO_1}{mn + nk + kp + pl}, \quad (4.32)$$

где числитель представляет собой величину, пропорциональную числу случаев, благоприятных выходу, а знаменатель — величину, пропорциональную числу всех возможных случаев.

Все величины, входящие в правую часть формулы, представляют собой дуги окружностей радиусом Δ_{y1} . Заменяя их соответствующими углами, получим

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta + \gamma_1}{\beta + \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_1 + \alpha_1} = \frac{\beta_1 + \gamma_1}{\beta + \frac{N_H - 1}{2} \alpha}. \quad (4.33)$$

Углы β_1 и α_1 , как видно из рисунка, будут равны

$$\beta_1 = \arcsin \frac{\Delta_{об}}{\Delta_{y1}}; \quad \alpha_1 = 2 \arcsin \frac{d}{2\Delta_{y1}}. \quad (4.34)$$

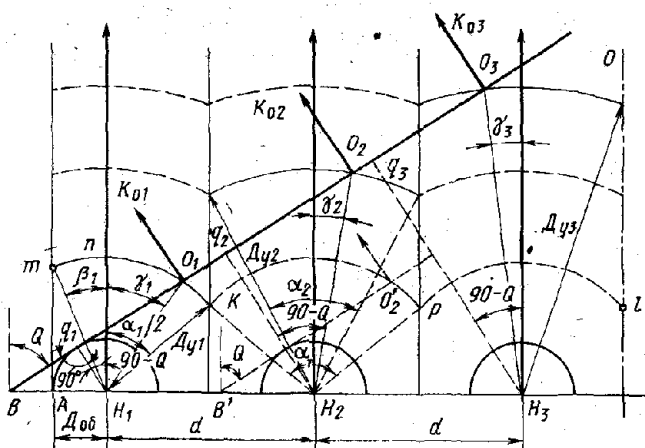


Рис. 4.7. К выводу вероятности выхода объекта из полосы поиска с учетом возможности ее появления перед любым наблюдателем.

Значение угла γ_1 можно найти из треугольника $H_1 q_1 O_1$:

$$\frac{H_1 q_1}{H_1 O_1} = \sin \text{угла } q_1 H_1 O_1, \quad (4.35)$$

где угол $\angle q_1 H_1 O_1 = \gamma_1 + (90^\circ - Q)$; $H_1 q_1 = \Delta_{об}$;

$$H_1 O_1 = \Delta_y; \quad \frac{H_1 q_1}{H_1 O_1} = \frac{\Delta_{об}}{\Delta_y} = \cos(\gamma_1 - Q);$$

$$\gamma_1 = \arccos \frac{\Delta_{об}}{\Delta_{y1}}. \quad (4.36)$$

Для объекта, находящегося в точке O_2 , по аналогии с предыдущим случаем вероятность выхода будет равна

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta_2 + \alpha_2 + \gamma_2}{\beta_2 + \frac{N_H - 1}{2} \alpha_2}, \quad (4.37)$$

где $\beta_2 = \arcsin \frac{D_{\text{об}}}{D_{y2}}$; $\alpha_2 = 2 \arcsin \frac{d}{2D_{y2}}$.

Значение угла γ_2 , определенное из треугольника $H_2 q_2 O_2$, равно

$$\gamma_2 = \arccos \frac{D_{\text{об}} + d \cos Q}{D_{y2}} + Q.$$

Для объекта, находящегося в точке O_3 , вероятность выхода можно найти по формуле

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta_3 + 2\alpha_3 - \gamma_3}{\beta_3 + \frac{N_H - 1}{2} \alpha_3}, \quad (4.38)$$

где $\beta_3 = \arcsin \frac{D_{\text{об}}}{D_{y3}}$; $\alpha_3 = 2 \arcsin \frac{d}{2D_{y3}}$.

Значение угла γ_3 , определенное из треугольника $H_3 q_3 O_3$, равно

$$\gamma_3 = \arccos \frac{D_{\text{об}} + d \cos Q}{D_{y3}} + Q. \quad (4.39)$$

Обобщив полученные результаты, получим формулу вероятности выхода объекта из полосы поиска при нахождении его в любом месте просматриваемой полосы

$$P_{\text{вых}} = \frac{\beta_i + (i-1)\alpha_i \pm \gamma_i}{\beta_i + \frac{N_H - 1}{2} \alpha_i}, \quad (4.40)$$

где

$$\alpha_i = 2 \arcsin \frac{a}{2D_{yi}}; \quad \beta_i = \arcsin \frac{D_{\text{об}}}{D_{yi}},$$

$$\gamma_i = \arccos \frac{D_{\text{об}} + (i-1)d \cos Q}{D_{yi}} \pm Q,$$

где i — порядковый номер наблюдателя (считая от ближайшего фланга, в полосе которого находится объект поиска). Знак «плюс» перед γ и Q ставится, когда объект поиска находится с правого борта наблюдателя, знак

«минус» — когда с левого борта. Если величина i неизвестна, расчеты целесообразно производить по формулам (3.135), (3.136).

Можно показать, что формула (4.40) является наиболее общей, а часто применяемая на практике формула (3.136) не что иное, как ее частный случай.

Раскроем значение формулы (4.40), приняв при этом, что обратные тригонометрические функции углов приближенно равны самим углам, выраженным в радианной мере, а угол Q (в радианах) приближенно равен тангенсу этого угла (что верно для небольших значений углов). Получим

$$P_{\text{вх}} = \frac{\frac{D_{\text{об}}}{D_y} + (i-1)2 \frac{d}{2D_y} - \frac{D_{\text{об}} + (i-1)d \cos Q}{D_y} + \operatorname{tg} Q}{\frac{D_{\text{об}}}{D_y} + \frac{N_n - 1}{2} 2 \frac{d}{2D_y}}.$$

Сокращая дробь на D_y и считая, что для небольших $Q \cos Q \approx 1$, получаем

$$P_{\text{вых}} = \frac{D_y \operatorname{tg} Q}{\frac{d}{2} (N_n - 1) + D_{\text{об}}}; \quad P_{\text{н вых}} = 1 - P_{\text{вых}} = 1 - \frac{D_y \operatorname{tg} Q}{\frac{d}{2} (N_n - 1) + D_{\text{об}}}.$$

Последняя формула полностью соответствует аналогичной по смыслу формуле (3.136), что и требовалось доказать.

4.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ЧИСЛА ОБНАРУЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ПОИСКЕ. РАСЧЕТЫ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ЗАДАННУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОИСКА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЙОНА ПОИСКА МЕЖДУ НАБЛЮДАТЕЛЯМИ

Математическое ожидание числа обнаруженных объектов при поиске будем определять для следующих условий: в районе площадью S_p поиск одинаковых объектов N_0 независимо выполняют N_n наблюдателей; каждый из наблюдателей, обнаруживший один из объектов, продолжает поиск; поиск носит пуассоновский характер.

В этих условиях математическое ожидание числа обнаруженных объектов можно рассчитать по известной из теории вероятностей формуле

$$M_{об} = N_o P_{об N_n} \quad (4.41)$$

где $P_{об N_n}$ — вероятность обнаружения одного объекта всеми N_n наблюдателями.

Как было показано в § 4.1, эта вероятность определяется по формуле (4.5).

Если наблюдатели однотипные, то

$$P_{об N_n} = 1 - \exp(-N_n \gamma t_n).$$

С учетом указанных соотношений формула (4.41) может быть переписана следующим образом:
для разнотипных наблюдателей

$$M_{об} = N_o \left\{ 1 - \exp \left[- \sum_{i=1}^{N_n} U_i(t) \right] \right\}; \quad (4.42)$$

для однотипных наблюдателей

$$M_{об} = N_o [1 - \exp(-N_n \gamma t_n)]. \quad (4.43)$$

Расчеты, обеспечивающие заданную эффективность поиска. Во многих практических расчетах поиска появляется необходимость решения следующей задачи; по известной (заданной) вероятности обнаружения объекта определить соответствующие ей условия проведения поиска.

Данная задача является обратной по отношению к рассмотренной, для которой получена формула (1.13)

$$P_{об} = 1 - e^{-\gamma t_n}.$$

Задавая вероятность обнаружения в течение заданного времени $P_{об з}$, находим по данной формуле время поиска t_n :

$$1 - P_{об з} = e^{-\gamma t_n}.$$

Преобразуя формулу $\ln(1 - P_{об з}) = \ln(e^{-\gamma t_n}) = -\gamma t_n$, получаем

$$t_n = -\ln(1 - P_{об з})/\gamma. \quad (4.44)$$

По формуле (4.44) рассчитан график, приведенный на рис. 4.8 и табл. 9 приложения, позволяющие по величине математического ожидания числа обнаружений объекта в единицу времени γ и заданной вероятности обнаружения рассчитывать требуемое время поиска.

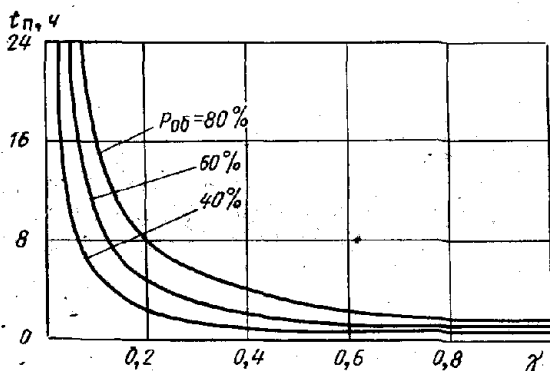


Рис. 4.8. Время, необходимое для обнаружения объекта поиска с заданной вероятностью.

Для дальнейших расчетов раскроем по формуле (4.15) значение γ :

$$t_{\text{п}} = \frac{-\ln(1 - P_{\text{обз}})}{(2D_{\text{об}}V_p/S_p)P_{\text{к}}} = \frac{-\ln(1 - P_{\text{обз}})S_p}{2D_{\text{об}}V_pP_{\text{к}}}. \quad (4.45)$$

Задаваясь вероятностью обнаружения объекта и площадью района поиска, по данной формуле можно рассчитать его продолжительность.

Можно решить и обратную задачу: найти площадь района, задаваясь вероятностью обнаружения объекта в течение заданного времени:

$$S_p = 2D_{\text{об}}V_p t_{\text{п}} P_{\text{к}} / [-\ln(1 - P_{\text{обз}})]. \quad (4.46)$$

Пример 4.5. Наблюдатель ведет поиск объекта в районе площадью $S_p = 4000 \text{ км}^2$, $D_{\text{об}} = 10 \text{ км}$, $V_p = 40 \text{ км/ч}$, $P_{\text{к}} = 1$. Задача вероятностность обнаружения объекта $P_{\text{обз}} = 0,7$.

Требуется рассчитать: 1) необходимое время поиска; 2) время поиска, обеспечивающего данную вероятность обнаружения при осмотре в два раза большей площади; 3) площадь обследования наблюдателем с заданной вероятностью обнаружения при уменьше-

нии времени поиска в три раза; 4) время поиска, обеспечивающего при сохранении остальных условий заданную вероятность $P_{обз} = 0,9$; 5) район поиска, в котором при сохранении остальных условий можно получить заданную вероятность $P_{обз} = 0,9$.

Решение: 1) по формуле (4.45) $t_n = 6$ ч; 2) $t_n = 12$ ч; 3) по формуле (4.46) $S_p = 1333$ м²; 4) $t_n = 11,5$ ч; 5) $S_p = 2087$ км².

Распределение района между наблюдателями с расчетом достижения наибольшей эффективности поиска. Теоретический и практический интерес представляет решение задачи распределения района поиска объектов между разнотипными наблюдателями.

Постановка этой задачи следующая. В районе площадью S_p находится N_0 объектов. Поиск производится двумя типами наблюдателей: $N_{н1}$ — количество наблюдателей первого типа; $N_{н2}$ — количество наблюдателей второго типа. Потенциалы обнаружения наблюдателей: $u_1(t)$ — потенциал обнаружения наблюдателя первого типа; $u_2(t)$ — потенциал обнаружения наблюдателя второго типа.

Соответствующие данным потенциалам вероятности обнаружения: $P_{об1} = 1 - e^{-u_1(t)}$ — вероятность обнаружения одного объекта одним наблюдателем первого типа; $P_{об2} = 1 - e^{-u_2(t)}$ — вероятность обнаружения одного объекта одним наблюдателем второго типа.

Обозначим через S_1 часть района поиска, обследуемого наблюдателями первого типа, а через $S_2 = S_p - S_1$ — часть района, обследуемого наблюдателями второго типа.

Необходимо рассчитать соотношение распределений общей площади района S_p между наблюдателями первого и второго типа таким образом, чтобы математическое ожидание числа обнаруженных объектов было наибольшим.

Приступая к решению задачи, примем, что N_0 объектов равномерно распределены в пределах общей площади района с плотностью N_0/S_p . Поэтому можно считать, что: в районе площадью S_1 находится $N_{о1} = (N_0/S_p) S_1$ объектов, а в районе площадью $S_2 = S_p - S_1$ находится $N_{о2} = (N_0/S_p) (S_p - S_1)$ объектов.

Математическое ожидание числа обнаруженных объектов в районе поиска всеми наблюдателями

$$M_{об} = N_{о1} P_{об1} + N_{о2} P_{об2} = N_{о1} \left[1 - \exp \left(- \frac{N_{н1} u_1(t)}{N_{о1}} \right) \right] +$$

$$+ N_{c2} \left[1 - \exp \left(- \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}} \right) \right] \quad (4.47)$$

Чтобы установить условия распределения площади района поиска между наблюдателями, обеспечивающими максимальное значение $MO_{обз}$, исследуем функцию $MO_{обз} = f(S_1)$ вначале на экстремум, а затем на максимум.

Продифференцируем функцию по S_1 :

$$\begin{aligned} M'_{обз} = \frac{dM_{обз}}{dS_1} = N'_{O1} - \left[N'_{O1} \exp \left(- \frac{N_{H1} u_1(t)}{N_{O1}} \right) + \right. \\ \left. + N_{O1} \left(\exp \left(- \frac{N_{H1} u_1(t)}{N_{O1}} \right) \right) \right] + \left[N'_{O2} \exp \left(- \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}} \right) + \right. \\ \left. + N_{O2} \left(\exp \left(- \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}} \right) \right) \right]. \quad (4.48) \end{aligned}$$

Раскроем значения производных и, приравняв $M'_{обз}$ нулю, получим

$$\begin{aligned} M'_{обз} = - \left[\frac{N_O}{S_p} \exp \frac{-N_{H1} u_1(t)}{N_{O1}} - \frac{N_{H1} u_1(t)}{N_{O1} S_p} \exp \frac{-N_{H1} u_1(t)}{N_{O1}} \right] - \\ - \left[- \frac{N_O}{S_p} \exp \frac{-N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}} - \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{O2} S_p} \exp \frac{-N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}} \right]. \quad (4.49) \end{aligned}$$

Равенство (4.49) существует только при

$$\frac{N_{H1} u_1(t)}{N_{O1}} = \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{O2}}. \quad (4.50)$$

Последняя формула и определяет условия, при которых $M_{обз}$ достигает своего экстремального значения.

По второй производной $M_{обз}$ убедимся, что

$$M''_{обз} < 0. \quad (4.51)$$

Это свидетельствует о том, что формула (4.50) содержит условие не только экстремального, но, что для нас главное, максимального значения математического ожидания числа обнаруженных объектов в районе поиска.

Подставим в формулу (4.50) значения N_{O1} и N_{O2} :

$$\frac{N_{H1} u_1(t) S_p}{N_O S_1} = \frac{N_{H2} u_2(t) S_p}{N_O S_p - N_O S_1}.$$

Сократив на S_p и N_O и преобразовав пропорцию, получим

$$\frac{S_1}{S_p} = \frac{N_{H1} u_1(t)}{N_{H1} u_1(t) + N_{H2} u_2(t)}, \quad (4.52)$$

$$\frac{S_2}{S_p} = \frac{N_{H2} u_2(t)}{N_{H1} u_1(t) + N_{H2} u_2(t)}. \quad (4.53)$$

Формулы (4.52) и (4.53) дают правило распределения района поиска между разнотипными наблюдателями: площадь района следует делить пропорционально числу наблюдателей и их потенциалу обнаружения.

Пример 4.6. Поиск в районе площадью $S_p = 1000 \text{ км}^2$ осуществляется наблюдателями двух типов: $N_{н1} = 1$ и $N_{н2} = 1$. Потенциалы обнаружения соответственно равны $u_1(t) = 0,92$, $u_2(t) = 2,3$.

Необходимо распределить район поиска между наблюдателями.

Решение. По формуле (4.52) находим

$$S_1/S_p = 0,286; \quad S_1 = S_p \cdot 0,286 = 286 \text{ км}^2; \quad S_2 = S_p - S_1 = 714 \text{ км}^2.$$

Для сравнения рассчитаем распределение площади между наблюдателями, основываясь на вероятностях обнаружения:

$$P_{об1} = 0,60; \quad P_{об2} = 0,90; \quad S_1/S_p = 0,40; \quad S_1 = 400 \text{ км}^2; \quad S_2 = 600 \text{ км}^2.$$

4.5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНЫХ МЕСТ ОБЪЕКТА ПОИСКА

Вероятность обнаружения при вторичном поиске (поиск «по вызову»). Помимо рассмотренных в § 4.1—4.4 вероятностей обнаружения при равномерном распределении вероятных мест объекта поиска целесообразно рассмотреть также и вероятность обнаружения объекта при неравномерном распределении его вероятных мест при вторичном поиске и поиске на линии.

Для расчета вероятности обнаружения объекта при вторичном поиске воспользуемся данными § 1.3, подтверждающими, что в случае неравномерного распределения вероятных мест объекта при вторичном поиске плотность вероятности распределения определяется по формуле (1.24).

Анализируя по формуле (1.24) и рис. 1.2 полученный закон распределения вероятных мест объекта поиска после обнаружения, приходим к следующему выводу.

1. Вероятные места нахождения объекта поиска после первоначального его обнаружения, в зависимости от расстояния до места этого обнаружения и прошедшего времени, распределяются неравномерно по сложному закону, описанному выражением (1.24).

2. Максимум плотности распределения с течением времени смещается от центра рассеяния к периферии. Это означает, что область наиболее вероятных мест нахождения объекта смещается с течением времени в ради-

альном направлении от места первоначального обнаружения.

3. С течением времени плотность распределения уменьшается (кривая, огибающая максимумы плотности распределения вероятностей, на рис. 1.2 асимптотически приближается к оси x).

Зная распределение вероятных мест объекта поиска и его скорости, рассчитаем вероятность нахождения объекта в пределах площади круга радиусом R через определенный промежуток времени t . Величину радиуса можно получить из уравнения

$$RI_0\left(\frac{RV_0 t}{\sigma^2}\right) - V_0 t I_1\left(\frac{RV_0 t}{\sigma^2}\right) = 0, \quad (4.54)$$

где I_0 и I_1 — функция Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядка от мнимого аргумента соответственно.

Уравнение (4.54) вытекает из решения задачи по определению максимума плотности вероятности на произвольный момент времени t . Для этого необходимо взять производную по R в выражении (1.24) и приравнять ее нулю.

Решение уравнения (4.54) относительно R возможно только методом последовательных приближений. Однако графический анализ при определенных значениях V_0 , t и σ показывает, что с приемлемой для практических расчетов точностью трансцендентное уравнение (4.54) может быть аппроксимировано линейным уравнением: разложением функций Бесселя в ряд или асимптотическим приближением. Как показывают расчеты, с приемлемой точностью функции Бесселя в нашем случае можно аппроксимировать: 1) при $V_0 t / \sqrt{2\sigma} \leq 1$ степенным рядом, ограничиваясь первыми двумя членами разложения; 2) при $V_0 t / \sqrt{2\sigma} > 1$ асимптотическим приближением.

Разложение функции Бесселя в степенной ряд выполняется по следующей формуле:

$$I_n(Z) = \frac{(Z/2)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{(Z/2)^{n+2}}{1! \Gamma(n+2)} + \frac{(Z/2)^{n+4}}{2! \Gamma(n+3)}, \quad (4.55)$$

где Γ — гамма-функция.

Пользуясь формулой (4.55) и ограничиваясь первыми двумя членами разложения функции Бесселя в степенной ряд, получаем следующие значения для функции Бесселя, входящие в первый и второй член приведен-

ного выше уравнения (4.54):

$$I_0\left(\frac{RV_0 t}{\sigma^2}\right) \approx 1 + \frac{R^2 V_0^2 t^2}{4\sigma^4},$$

$$I_1\left(\frac{RV_0 t}{\sigma^2}\right) \approx \frac{RV_0 t}{2\sigma^2} + \frac{R^3 V_0^3 t^3}{16\sigma^6}.$$

Подставим полученные значения в формулу (4.54):

$$R\left(1 + \frac{R^2 V_0^2 t^2}{4\sigma^4}\right) - V_0 t \left(\frac{RV_0 t}{2\sigma^2} + \frac{R^3 V_0^3 t^3}{16\sigma^6}\right) = 0.$$

Решая уравнение относительно R , получаем его значение для $V_0 t / \sqrt{2}\sigma \leq 1$:

$$R = \sqrt{\frac{1 - V_0^2 t^2 / 2\sigma^2}{V_0^2 t^2 / 4\sigma^4 + V_0^4 t^4 / 16\sigma^6}},$$

а для $V_0 t / \sqrt{2}\sigma > 1$ воспользуемся асимптотическим приближением функции Бесселя:

$$I_n(Z) = \frac{e^Z}{\sqrt{2\pi Z}} \left[1 + O\left(\frac{1}{Z}\right) \right].$$

Пользуясь указанным приближением, получаем значения функций Бесселя, входящих в первый и второй члены уравнения (4.54), равными между собой. Следовательно, будут равны между собой и коэффициенты при этих функциях:

$$R = V_0 t.$$

Окончательно получим: при $V_0 t / \sqrt{2}\sigma \leq 1$, или, что то же самое, при $V_0 \leq \sqrt{2}\sigma / t$

$$R = \sqrt{\frac{1 - V_0^2 t^2 / 2\sigma^2}{V_0^2 t^2 / 4\sigma^4 + V_0^4 t^4 / 16\sigma^6}}, \quad (4.56)$$

при $V_0 > \sqrt{2}\sigma / t$

$$R = V_0 t.$$

Вероятность нахождения объекта в пределах площади сектора круга радиусом R с центральным углом Θ через определенный промежуток времени $P(R, t)$ [с] можно рассчитать, проинтегрировав выражения (1.24) в необходимых пределах.

Интегрируем (1.24) по площади:

$$P(R, t) [c] = \int_0^{\theta} \int_0^R \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_o t}{\sigma^2}\right) r dr d\varphi =$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \int_0^R \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_o t}{\sigma^2}\right) \frac{r}{\sigma^2} dr. \quad (4.57)$$

Интересующую нас вероятность нахождения объекта в пределах площади круга $P(R, t)_{кр}$ получим при $\theta = 2\pi$

$$P(R, t)_{кр} = \int_0^R \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_o t}{\sigma^2}\right) \frac{r}{\sigma^2} dr. \quad (4.58)$$

Последнее выражение при интегрировании от R_1 до R_2 дает вероятность нахождения объекта в круговом кольце $P(R_1 - R_2, t)_{к\text{лц}}$, где R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы кольца:

$$P(R_1 - R_2, t)_{к\text{лц}} = \int_{R_1}^{R_2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_o t}{\sigma^2}\right) \frac{r}{\sigma^2} dr. \quad (4.59)$$

Аналогично из (4.57) можно получить вероятность нахождения объекта в пределах части кольца (кольцевого сектора):

$$P(R_1 - R_2, t)_{к\text{лц с}} = \frac{\theta}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \exp\left(-\frac{r^2 + V_o^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rV_o t}{\sigma^2}\right) \frac{r}{\sigma^2} dr. \quad (4.60)$$

Интегралы в формулах (4.57) — (4.60) через элементарные или табулированные специальные функции не выражаются. Поэтому необходимо прибегать к численному интегрированию. Результаты численного интегрирования представлены в виде графика (рис. 4.9), рассчитанного для различных значений $V_o t / \sigma$. Кривые на рисунке представляют собой графическое изображение интегрального закона распределения вероятных мест объекта поиска после его первичного обнаружения.

Пример 4.7. Предполагаемая скорость объекта поиска $V_o = 8$ км/ч, $t = 1$ ч, $R = 10$ км, $\sigma = 4$ км.

Необходимо найти вероятность нахождения объекта в пределах площади круга указанного радиуса.

Решение. 1. Для входа в график рассчитываем: $V_0 t / \sigma = 2$; $(R - V_0 t) / \sigma = 0,5$.

2. На графике рис. 4.9 по полученным аргументам находим $P(R, t)_{кр} = 0,6$.

Практический интерес представляет определение вероятности нахождения объекта поиска в пределах площади круга, кольца или их части при радиусе

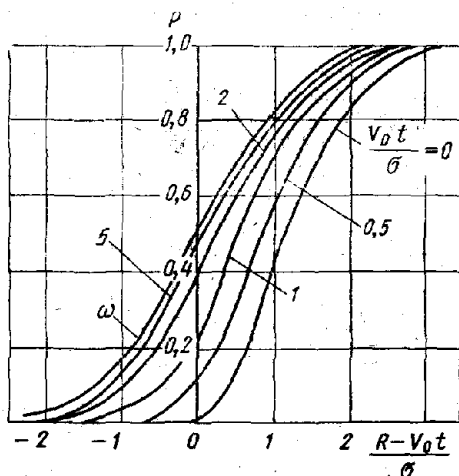


Рис. 4.9. Определение вероятности нахождения объекта поиска в пределах площади круга или части круга после его обнаружения.

$R = V_0 t$. В этом частном случае интегрирование формул (4.57) — (4.60) возможно.

Для круга

$$P(R = V_0 t; t)_{кр} = \int_0^{R=V_0 t} \exp\left(-\frac{r^2 + V_0^2 t^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r V_0 t}{\sigma^2}\right) \frac{r}{\sigma^2} dr = \\ = \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_0^2 t^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{V_0^2 t^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (4.61)$$

Для сектора

$$P(R = V_0 t; t)_c = \frac{\theta}{4\pi} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_0^2 t^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{V_0^2 t^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (4.62)$$

Рассчитать вероятность нахождения объекта в пределах площади кольца, ограниченного радиусами R_1 и R_2 , а также в части этого кольца с центральным углом θ нетрудно, так как площадь кольца может рассматри-

ваться как разность площадей двух кругов радиусом R_1 и R_2 соответственно.

Вероятность обнаружения при поиске на линии (на рубеже). Эффективность поиска на линии рассмотрим применительно к двум возможным способам маневрирования наблюдателей: взаимнообратными и перекрестными курсами («по восьмерке»).

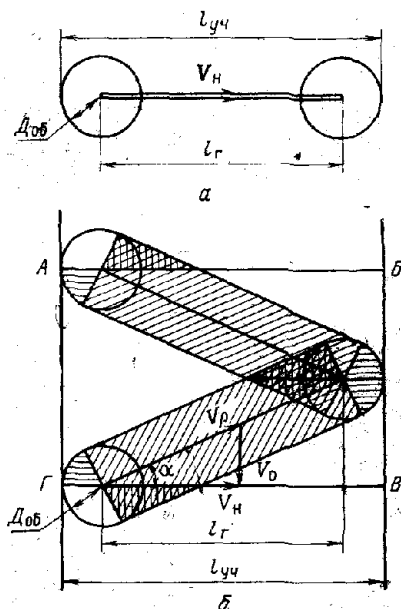


Рис. 4.10. К определению вероятности обнаружения объекта при поиске на линии взаимнообратными курсами.

Рассмотрим вначале, как определяется вероятность обнаружения объекта при поиске на линии взаимнообратными курсами. Как видно из рис. 4.10, маневрирование, выполняемое абсолютным движением (рис. 4.10,а), можно представить как относительное перемещение с учетом зоны обнаружения наблюдателя (рис. 4.10,б).

Интересующую нас вероятность обнаружения объекта можно найти по формуле геометрической вероятности как отношение площади S_H , просматриваемой наблюдателем за один цикл поиска, к площади возможных на-

хождений цели S_0 за тот же период с учетом вероятности контакта:

$$P_{об} = (S_H/S_0) P_K. \quad (4.63)$$

Причем, как видно из рисунка, S_H равняется сумме площадей двух прямоугольников ($S_{пр}$ — косая штриховка), четырех секторов (S_c — горизонтальная штриховка), без площади четырех треугольников (S_A — вертикальная штриховка):

$$S_H = 2S_{пр} + 4S_c \quad (4.64)$$

равняется площади прямоугольника $AEBГ$ ($S_{AEBГ}$)

$$S_{пр} = 2D_{об} \left(\frac{l_r}{\cos \alpha} \right) = \frac{2D_{об} l_r \sqrt{1+k^2}}{k},$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad k = \frac{V_H}{V_0} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$S_c = \frac{\pi D_{об}^2}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0,25 D_{об}^2 (\pi - 2 \operatorname{arccctg} k);$$

$$S_A = 0,5 D_{об}^2 k.$$

Подставляя значения соответствующих величин в (4.64), получаем

$$S_H = \frac{4D_{об} l_r \sqrt{1+k^2}}{k} + D_{об}^2 (\pi - 2 \operatorname{arccctg} k - 2k).$$

Как видно из рис. 4.10, б,

$$S_{AEBГ} = 2l_r l_{уч} \frac{V_0}{V_H} = \frac{2l_{уч} l_r}{k}$$

Подставляя значения соответствующих площадей в (4.63), получаем

$$P_{об} = \left[\frac{2D_{об} \sqrt{1+k^2}}{l_{уч}} - \frac{k D_{об}^2}{l_r l_{уч}} \left(k + \operatorname{arccctg} k - \frac{\pi}{2} \right) \right] P_K, \quad (4.65)$$

где $l_{уч}$ — длина участка; l_r — длина галса.

Заметим, что при $V_H=0$, $k=0$, $P_{об} = (2D_{об}/l_{уч}) P_K$, что вполне очевидно.

Рис. 4.11. К определению вероятности обнаружения объекта при поиске на линии перекрестными курсами.

Вероятность обнаружения объекта при поиске на линии перекрестными курсами («по восьмерке») рассчитывается аналогично.

На рис. 4.11 показано движение наблюдателя в абсолютных и относительных перемещениях:

$$P_{об} = S_H / S_0 \approx P_K. \quad (4.66)$$

Как видно из рисунка, S_H равняется сумме площадей двух горизонтальных прямоугольников ($S_{пр г}$ — косая штриховка), двух вертикальных прямоугольников ($S_{пр в}$ — горизонтальная штриховка), четырех секторов (S_c — вертикальная штриховка), без площади четырех квадратов ($S_{кв}$ — двойная косая штриховка):

$$S_H = 2S_{пр г} + 2S_{пр в} + 4S_c - 4S_{кв}. \quad (4.67)$$

Площадь S_0 равняется произведению $l_{уч}$ на путь объекта за время одного цикла поиска l_0 : $S_0 = l_{уч} l_0$. Путь объекта за один цикл поиска можно найти из следующей очевидной пропорции:

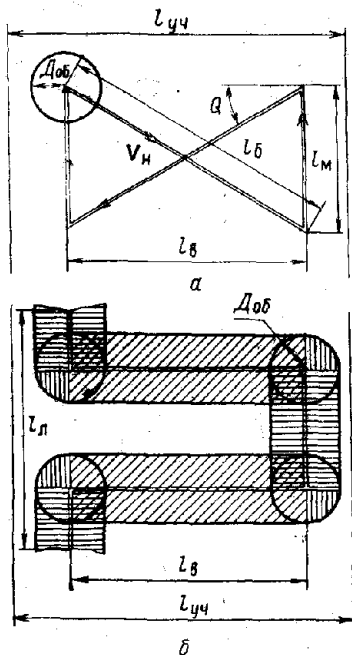
$$\frac{l_0}{V_0} = \frac{2l_M + 2l_6}{V_H}.$$

Учитывая, что $l_6 = l_M \operatorname{cosec} Q = l_M (V_H / V_0)$, получаем:

$$l_0 = 2l_M \frac{V_H + V_0}{V_H} = 2l_M \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

Таким образом,

$$S_0 = l_{уч} \left(2l_M \frac{k+1}{k} \right). \quad (4.68)$$



Как видно из рис. 4.11,б,

$$S_{\text{пр г}} = 2D_{\text{об}}l_{\text{в}},$$

где $l_{\text{в}} = \frac{l_{\text{м}}}{\text{tg } Q} = l_{\text{м}} \sqrt{k^2 - 1}$, поэтому

$$S_{\text{пр г}} = 2D_{\text{об}}l_{\text{м}} \sqrt{k^2 - 1}; \quad S_{\text{пр в}} = 2D_{\text{об}}l_{\text{м}} \frac{k+1}{k},$$

$$S_{\text{с}} = \pi D_{\text{об}}^2 / 4; \quad S_{\text{кв}} = D_{\text{сб}}^2.$$

Подставляя значения соответствующих величин в (4.66), получаем

$$P_{\text{об}} = \left[\frac{2D_{\text{об}}}{l_{\text{уч}}} + \frac{2D_{\text{об}}}{l_{\text{уч}}} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} k + \frac{D_{\text{об}}^2 (\pi - 4) k}{2l_{\text{уч}} l_{\text{м}} (k+1)} \right]. \quad (4.69)$$

Глава 5

ПОИСКОВЫЕ СИТУАЦИИ И СПОСОБЫ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Под поисковой ситуацией понимают обстановку и условия проведения поиска, определяемые задачами поисковых сил, а также наличием и объемом информации о местоположении объекта поиска и элементах его движения. Все многообразие поисковых ситуаций сводится к следующим трем основным типам поиска: 1) на площади (в заданном районе); 2) на линии (на рубеже); 3) по данным обнаружения других сил (вторичный поиск или поиск по вызову) [15].

Поиск на площади (в заданном районе) характеризуется равновероятным нахождением объекта в любой точке заданного района и равномерным распределением его курсов от 0 до 360°. При этом перемещение объекта через заданный район происходит с любого направления. Поисковые силы в этом случае не имеют каких-либо конкретных данных о местоположении и элементах движения объекта. Задачей поиска является обнаружение объекта или подтверждение его отсутствия в заданном районе.

Поиск на линии (на рубеже) представляет ситуацию, при которой поисковые силы не должны допустить про-

ход (пролет) объекта поиска через какой-либо рубеж. Эта ситуация характеризуется как наличием информации об элементах движения объекта и возможном участке прорыва, так и ее отсутствием. Такая ситуация складывается, когда известен вероятный курс объекта и ожидается его приближение к заданной линии.

Поиск по данным обнаружения других сил (вторичный поиск или поиск по вызову) в основном сопровождается наличием информации о месте и элементах движения объекта поиска за исключением отдельных случаев: отсутствия данных о направлении движения объекта или ограничения его пределами какого-либо сектора. Следовательно, задачей поиска в этой ситуации является нахождение объекта, с которым был потерян контакт после первичного обнаружения. Место и время последнего обнаружения объекта являются исходными.

На основании требований проведения поиска не только в наиболее благоприятных для обнаружения объекта условиях, но и наиболее оптимальными способами поиска реализация его осуществляется выбором оптимальных элементов способа поиска (поисковой траектории, скорости и характера обследования водной среды), а для группы наблюдателей и элементов поискового строя (способа построения и расстояний между наблюдателями).

Поисковые траектории могут быть самыми разнообразными, а скорости хода изменяться от минимальной до максимально допустимой. При этом среда может обследоваться непрерывно (непрерывный поиск) или дискретно (дискретный поиск). Особенность дискретного поиска состоит в чередовании обследования среды средствами наблюдения на месте (или на малом ходу) с перемещением в очередную позицию наблюдения на высокой скорости хода, при которой практически наблюдение прекращается.

Элементы способа поиска и поискового строя выбираются таким образом, чтобы максимизировать или минимизировать принятый критерий эффективности поиска. В свою очередь, критерий эффективности зависит от поисковой ситуации. Поэтому способы поиска и поисковые строи в случае непрерывного обследования среды будут рассмотрены применительно к той или иной поисковой ситуации; обоснование элементов дискретного поиска выделено в отдельный параграф.

5.2. СПОСОБЫ ПОИСКА НА ПЛОЩАДИ (В ЗАДАННОМ РАЙОНЕ)

Организация поиска одиночным наблюдателем. Пусть местоположения объекта поиска равномерно распределены в районе площадью S_p , т. е. примем, что его нахождение в любой части района равновероятно. Дальность обнаружения объекта наблюдателем, осуществляющим поиск на скорости V_n , обозначим через $D_{об}$.

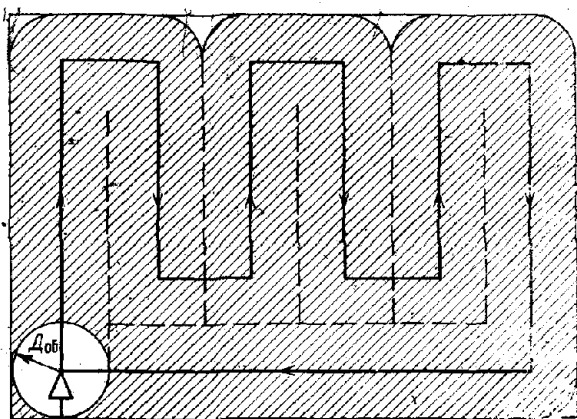


Рис. 5.1. Поиск параллельными курсами в заданном районе.

Принципиально можно организовать поиск, располагая галсы закономерно (закономерный поиск) или случайно (случайный поиск). При этом под закономерным поиском понимается обследование среды с одноразовым попаданием каждой точки района в зону обнаружения и исключающее повторное попадание в нее до конца обследования всего района. Примером закономерного поиска служит поиск параллельными галсами (рис. 5.1). Если же в районе выполняется случайный поиск, производимый в среднем равномерно по площади (рис. 5.2), то повторные попадания возможны и до конца обследования всего района.

Основным параметром эффективности поиска является физическая константа γ , определяющая как математическое ожидание времени, необходимого для обнаружения неподвижного объекта при организации зако-

номерного (экстенсивного) поиска $T_{об}=1/2\gamma$, так и математическое ожидание времени, необходимого для обнаружения, при неограниченном времени случайного (интенсивного) поиска $T_{об}=1/\gamma$ (§ 4.2). Так как математическое ожидание времени обнаружения при закономерном поиске неподвижных объектов в два раза меньше, чем при случайном поиске, поиск на площади (в районе) неподвижных объектов целесообразно осуществлять закономерным маневрированием параллельными галсами.

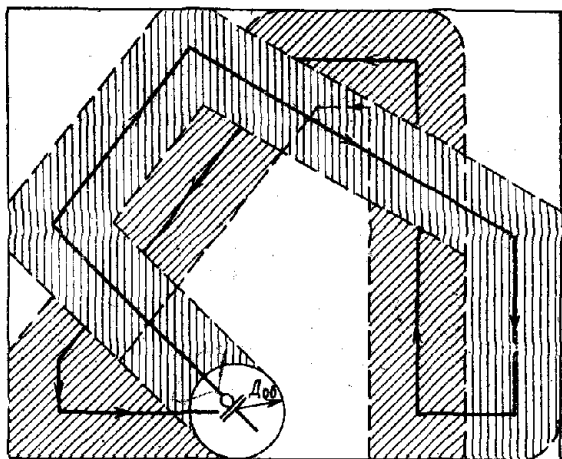


Рис. 5.2. Случайный поиск в заданном районе.

При организации поиска должна решаться задача распределения поисковых усилий не только в пространстве, но и во времени. При поиске на площади (в районе) нет оснований для изменения вероятности появления объекта в разных участках района поиска с течением времени. Поэтому поисковые усилия целесообразно распределять равномерно и в пространстве и во времени, чему отвечает циклическое повторение обследований одних и тех же участков через разные промежутки времени. Один из таких вариантов расположения поисковых галсов показан на рис. 5.1.

При организации поиска на площади (в районе) существенное значение приобретает выбор скорости об-

следования среды и определение времени, необходимого для обнаружения объекта с заданной вероятностью, максимальной площади района поиска и необходимой поисковой производительностью.

Выбор оптимальной скорости обследования водной среды целесообразно осуществлять максимизацией поисковой производительности (см. § 4.1).

Время $t_{\text{п}}$, необходимое для обнаружения объекта поиска с заданной вероятностью $P_{\text{об}}$ при условии, что объект находится в районе поиска, может быть получено из формулы (4.45), по которой определяют и время, требуемое для подтверждения отсутствия с заданной вероятностью объекта в районе поиска. Площадь района $S_{\text{р}}$, в котором обеспечивается обнаружение цели с заданной вероятностью в заданный срок $t_{\text{п}}$, находится по формуле (4.46).

В условиях перемещения объекта поиска через заданный район с любого направления вероятность его обнаружения, как показано в [29], определяется по формуле

$$P_{\text{об}}(t_{\text{п}}) = \frac{\gamma}{\gamma + \delta} [1 - e^{-(\gamma + \delta)t_{\text{п}}}], \quad (5.1)$$

где δ — плотность потоков выходов объекта из районов поиска.

При $t \rightarrow \infty$ получим $W = \gamma / (\gamma + \delta)$. Плотность потока выходов объекта можно определить по формуле $N_{\text{в}} = 1/T_{\text{вых}}$, где $T_{\text{вых}}$ — математическое ожидание времени выхода объекта из района.

В свою очередь, математическое ожидание времени выхода объекта поиска из района, исходя из того, что он пересекает район любым курсом, можно определить по формуле

$$T_{\text{вых}} = L/V_0, \quad (5.2)$$

где L — средняя ожидаемая величина пути при пересечении района, которая зависит от разме-

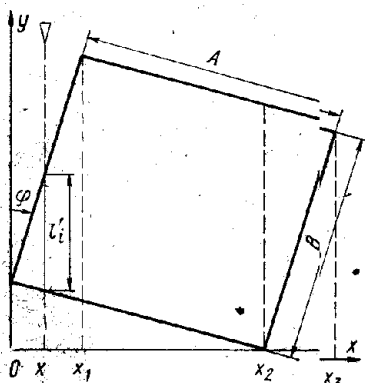


Рис. 5.3. Путь объекта поиска при пересечении района.

ров района, угла встречи объекта с районом, от участка района, где движется цель, и определяется следующим образом [7].

Предположим, что объект поиска пересекает район со сторонами A и B под случайным углом φ , проходя путь l' (рис. 5.3). Выразим длины пути объекта через значение абсциссы точки его входа в район. Из рис. 5.3 найдем

$$\begin{aligned} x/\sin \varphi \cos \varphi & \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_1; \\ B/\cos \varphi & \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2; \\ (x_2 - x)/\sin \varphi \cos \varphi & \quad \text{при } x_2 \leq x \leq x_3, \end{aligned}$$

где $x_1 = B \sin \varphi$; $x_2 = A \cos \varphi$; $x_3 = A \cos \varphi + B \sin \varphi$.

Среднее значение длины пути объекта в районе по теореме о среднем значении переменной величины будет

$$l' = \frac{\int_0^{x_3} l' dx}{x_3} = \frac{\int_0^{x_1} l' dx + \int_{x_1}^{x_2} l' dx + \int_{x_2}^{x_3} l' dx}{x_3}.$$

После подстановки значений l' и преобразований получим

$$l' = AB / (A \cos \varphi + B \sin \varphi). \quad (5.3)$$

Как видно из выражения (5.3), при изменении угла φ от 0 до $\pi/2$ величина l' принимает те же значения, что и при изменении его от $\pi/2$ до π . Поэтому средний путь объекта поиска при любом значении угла встречи будет

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} l' d\varphi / 2\pi. \quad (5.4)$$

После подстановки значения величины l' в выражение (5.4) и интегрирования получим среднюю ожидаемую длину пути объекта поиска при пересечении района

$$l = \frac{2AB}{\pi \sqrt{A^2 + B^2}} \ln \frac{B(\sqrt{A^2 + B^2} + B)}{A(\sqrt{A^2 + B^2} - A)}. \quad (5.5)$$

С учетом выражений (5.2) и (5.5) получим формулу для ожидаемого времени выхода объекта из района поиска

$$T_{\text{вых}} = \frac{2AB}{\pi \sqrt{A^2 + B^2}} \ln \frac{B(\sqrt{A^2 + B^2} + B)}{A(\sqrt{A^2 + B^2} - A)}. \quad (5.6)$$

Для практических расчетов формулу (5.6) можно преобразовать следующим образом:

$$T_{\text{вых}} = 2kA/V_0,$$

где

$$k = \frac{B/A}{\pi V(B/A)^2 + 1} \ln \left[\frac{BV(B/A)^2 + 1 + B/A}{AV(B/A)^2 + 1 - 1} \right]. \quad (5.7)$$

Таблица 5.1

Значение k в зависимости от отношения B к A

B/A	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00
k	0,398	0,48	0,48	0,52	0,55	0,60	0,65	0,72	0,77
B/A	6,00	7,00	8,00	9,00	10,0	15,0	20,0		
k	0,85	0,88	0,90	0,95	1,10	1,15	1,20		

По формуле (5.7) составлена табл. 5.1, входным аргументом которой служит отношение длины района к его ширине.

Таким образом, время, необходимое для обнаружения объекта поиска с заданной вероятностью $P_{\text{обз}}$ при условии пересечения им района поиска с любого направления, можно получить из формулы (5.1) аналогично формуле (4.45):

$$t_{\pi} = \frac{-\left[\ln \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right) - \ln \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} - P_{\text{обз}} \right) \right]}{\gamma + \delta}, \quad (5.8)$$

где $0 < P_{\text{обз}} \leq \gamma/(\gamma + \delta)$.

Организация поиска группой наблюдателей. Ограниченные возможности обнаружения объекта поиска (особенно уклоняющегося) одиночным наблюдателем вызывают необходимость организации поиска группой наблюдателей. Организуя поиск группой, следует выбрать оптимальное построение наблюдателей, т. е. такие элементы поискового строя, при которых вероятность обнаружения будет максимальной.

Рассмотрим выбор оптимальных элементов, построив группы наблюдателей в зависимости от возможности уклонения объекта поиска от обнаружения. Эта возможность определяется соотношением дальностей обнаруже-

ния и скоростей наблюдателя и объекта поиска, а также расстояниями между наблюдателями и их числом. Очевидно, что из всех возможных случаев следует рассмотреть два: когда объект поиска, обладая преимуществом в дальности обнаружения и скорости уступает наблюдателям в скорости и когда объект поиска не имеет преимущества в дальности обнаружения. Так, при преимуществе в дальности обнаружения, как показано в § 3.3, объект поиска всегда может уклониться, независимо от числа наблюдателей и их построения. Если же объект поиска уступает им в дальности обнаружения, уклонение его невозможно, независимо от числа наблюдателей и их построения.

Если $D_{об} < D_u$ и $V_{об} > V_o$, вероятность неуклонения объекта поиска, от обнаружения определяется по формулам (3.135), (3.137) и (3.138), из анализа которых следует, что вероятность неуклонения объекта из полосы поиска возрастает с увеличением расстояний между наблюдателями, но при этом повышается успешность маневра прорыва объекта между наблюдателями. Вероятность обнаружения прорывающегося объекта можно определить, исходя из отклонения фактической дальности обнаружения объекта наблюдателем от ее среднего значения и возможных ошибок осуществления маневра, ведущих к пересечению линии поиска ближе к одному из наблюдателей. Вполне логично считать, что эти отклонения и ошибки маневра подчиняются нормальному закону распределения. Тогда, обозначив через σ_d и $\sigma_{пр}$ средние квадратические величины отклонения фактической дальности от ее среднего значения и фактической точки прорыва от расчетной, соответственно, получим вероятность обнаружения объекта, пересекающего линию поиска в расстоянии x_i от i -го наблюдателя:

$$P_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x_i - D_{н}}{\sqrt{2} \sqrt{\sigma_d^2 + \sigma_{пр}^2}} \right), \quad (5.9)$$

где $\Phi(\lambda)$ — функция Лапласа.

Вероятность того, что объект поиска не будет обнаружен ни одним из наблюдателей, между которыми выполняется прорыв, выражается формулой

$$P_{н об} = (1 - P_1)(1 - P_2), \quad (5.10)$$

где P_1 и P_2 — вероятности обнаружения объекта поиска первым и вторым наблюдателями.

Принимая, что наблюдаемый объект маневрирует наилучшим образом и пересекает линию поиска точно посередине между двумя наблюдателями на равных расстояниях x_1 и x_2 от одного и другого, получим $x_1 = d/2$. Тогда формула (5.10) принимает следующий вид:

$$P_{\text{по}} = \frac{1}{4} \left[1 + \Phi \left(\frac{d/2 - D_{\text{н}}}{\sqrt{2} \sqrt{\sigma_d^2 + \sigma_n^2}} \right) \right]^2.$$

Оптимальные расстояния между наблюдателями будут соответствовать максимальному значению вероятности $P_{\text{по}}$ из всех ее значений, вычисленных по формуле (3.138) для различных d : от d_{min} с шагом Δd до d_{max} .

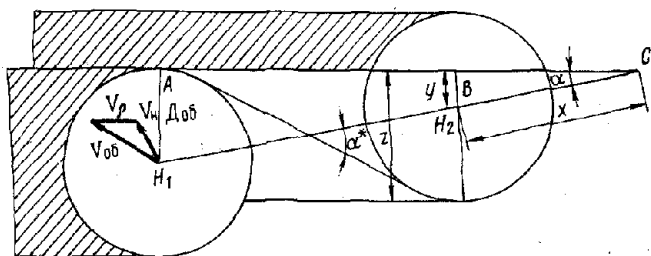


Рис. 5.4. Площадь относительной полосы группы.

В условиях, когда объект не может уклониться от обнаружения, т. е. когда наблюдатели обладают преимуществом в дальности обнаружения ($D_{\text{об}} > D_y$), эффективность поиска будет определяться только площадью относительной полосы группы наблюдателей. Для определения этой площади обратимся к рис. 5.4, где точки H_1 и H_2 соответствуют местоположению двух смежных наблюдателей, находящихся друг от друга на расстоянии d и движущихся со скоростью V_n . В точке H_1 построим треугольник скоростей для некоторого курса объекта поиска и проведем к зонам обнаружения наблюдателей касательные, параллельные вектору относительной скорости V_p . В результате получим площадь S_p относительной полосы поиска двух наблюдателей за единицу времени (заштрихованная на рис. 5.4). Из геометрии построения получим

$$S_p = 2(2D_{\text{об}}V_p) - ZV_p^2 = (4D_{\text{об}} - Z)V_p, \quad (5.11)$$

где Z — перекрытие относительных полос поиска смежных наблюдателей в группе.

Из выражения (5.11) очевидно, что эффективность поиска группы наблюдателей зависит от величины перекрытия Z , с увеличением которой будет уменьшаться и эффективность поиска. В свою очередь, величина Z зависит от расстояния между наблюдателями и вектором относительной скорости V_p , направление которого вполне определяется углом α . Действительно, из рис. 5.4:

$$Z = D_{об} + y.$$

Из подобия треугольников H_1AC и H_2BC очевидно:

$$D_{об}/y = (d+x)/x,$$

откуда

$$y = x D_{об} / (d+x). \quad (5.12)$$

Из треугольника H_1AC

$$x = D_{об} / \sin \alpha - d. \quad (5.13)$$

После подстановки (5.13) в (5.12) получим

$$y = D_{об} - d \sin \alpha.$$

Тогда

$$Z = 2D_{об} - d \sin \alpha. \quad (5.14)$$

Из выражения (5.14) видно, что Z зависит от угла α , лежащего в пределах от 0 до 2π . Очевидно, что формула (5.14) справедлива для значений угла α от 0 до $\alpha^* = \arcsin(2D_{об}/d)$. Аналогично определяются величины Z для $\alpha^* \leq \alpha \leq 2\pi$ (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Функция $Z = \varphi(\alpha)$

i	α_i	Z_i
1	$0 < \alpha_1 < \alpha^*$	$2D_{об} - d \sin \alpha_1$
2	$\alpha^* \leq \alpha_2 \leq \pi - \alpha^*$	0
3	$\pi - \alpha^* < \alpha_3 \leq \pi$	$2D_{об} - d \sin \alpha_3$
4	$\pi < \alpha_4 < \pi + \alpha^*$	$2D_{об} + d \sin \alpha_4$
5	$\pi + \alpha^* \leq \alpha_5 \leq 2\pi - \alpha^*$	0
6	$2\pi - \alpha^* < \alpha_6 \leq 2\pi$	$2D_{об} + d \sin \alpha_6$

Найдем математическое ожидание $M(Z)$ величины Z как функции $\varphi(\alpha)$ от случайного аргумента α по формуле

$$M[Z] = \sum_{i=1}^6 \int_{\alpha'_i}^{\alpha''_i} \varphi(\alpha_i) f(\alpha) d\alpha, \quad (5.15)$$

где $f(\alpha)$ — плотность распределения величины α_i .

Поскольку при поиске в районе все курсы объекта от нуля до 2π равновероятны, плотность их распределения будет $1/2\pi$. Тогда на основании формулы (5.15) получим

$$\begin{aligned} M[Z] = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha^*} (2D_{об} - d \sin \alpha) d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\alpha^*}^{\pi} (2D_{об} - d \sin \alpha) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi+\alpha^*} (2D_{об} + d \sin \alpha) d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\alpha^*}^{2\pi} (2D_{об} + d \sin \alpha) d\alpha = 4D_{об} \frac{\arcsin \frac{2D_{об}}{d}}{180} - \\ & - \frac{2}{\pi} d \left(1 - \cos \arcsin \frac{2D_{об}}{d} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что величина $M(Z)$ уменьшается с увеличением расстояния d между наблюдателями, что и является одним из мероприятий, повышающих эффективность поиска группы наблюдателей в заданном районе при $D_{об} > D_y$. В этом случае поисковую производительность W_T группы наблюдателей можно определить по формуле

$$W_T = [2D_{об}N_n - M[Z](N_n - 1)]V_p, \quad (5.17)$$

где V_p — средняя относительная скорость.

Поисковую производительность группы можно увеличить, организовав обследование заданного района таким образом, чтобы смежные наблюдатели имели взаимобратные курсы (рис. 5.5). Очевидно, что при таком маневрировании не будет перекрытия относительных полос

смежных наблюдателей. В этом случае поисковую производительность можно определить по формуле

$$W_T = (2D_{об}N_n - M[Z'])(N'_n - 1), \quad (5.18)$$

где N'_n — число наблюдателей, осуществляющих поиск на параллельных курсах; $M[Z']$ — математическое ожидание перекрытия относительных полос смежных наблюдателей, осуществляющих поиск на параллельных курсах.

Номограмма для расчетов поиска на площади. Для производства расчетов поиска на площади (в заданном районе) целесообразно использовать специальную номограмму [19].

С ее помощью (при условии нахождения объекта поиска в районе) можно определить вероятность обнаружения $P_{об}$, продолжительность поиска t_n , максимальную площадь района поиска S_{max} и необходимый наряд сил.

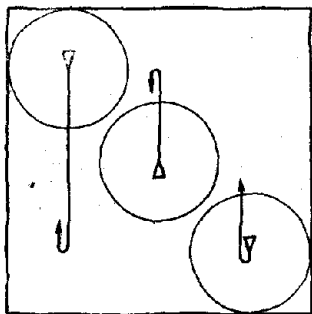


Рис. 5.5. Поиск в заданном районе группой наблюдателей.

Для определения $P_{об}$ рассчитывается поисковая производительность (например, 200 миль²/ч). От этого значения (1 на рис. 5.6) проводится линия, параллельная вертикальной оси номограммы, до пересечения с прямой, соответствующей значению времени поиска в часах (2). Из точки пересечения параллельно горизонтальной оси проводится прямая до пересечения с прямой, соответствующей значению площади района поиска (3). Из этой позиции вертикально вниз проводится прямая до пересечения с кривой вероятности обнаружения объекта хотя бы один раз (4). Проекция найденной точки на вертикальную ось номограммы и будет вероятностью обнаружения объекта поиска (5).

Для определения продолжительности поиска следует войти в номограмму с заданной вероятностью (позиция 6) и с поисковой производительностью (1). Из позиции (6) проводится горизонтальная прямая до пересечения с кривой вероятности обнаружения (7), далее вертикально вверх до прямой, соответствующей площади района поиска (8) и от нее горизонтально до пересечения с вертикальной прямой, проведенной из позиции 1. В точке пересечения (9) на прямой времени поиска находим искомую величину.

Для определения максимальной площади района следует войти в номограмму с заданной вероятностью (6) и поисковой произво-

дительностью (1). Из позиции 6 горизонтально проводится прямая до пересечения с кривой вероятности обнаружения (7), а от нее вертикально вверх. Из позиции 1 проводится прямая до пересечения с прямой, соответствующей заданной продолжительности поиска (2), до пересечения с прямой, проведенной из позиции 1. В точке пересечения этих прямых (10) снимается искомая величина.

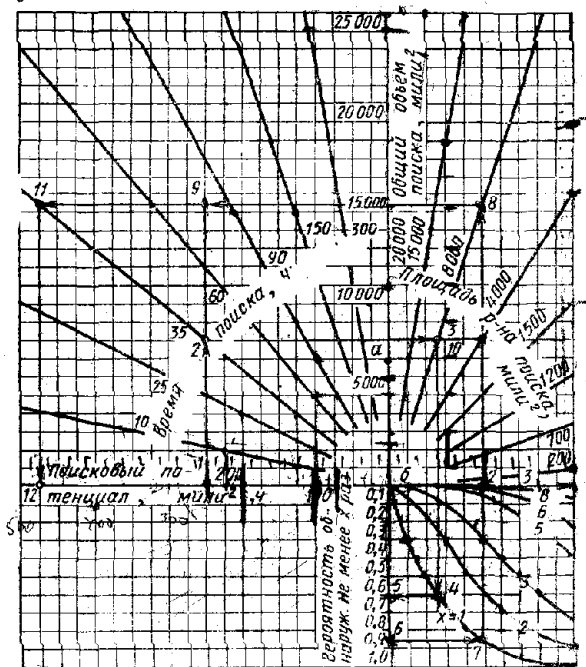


рис. 5.6. Номограмма для расчета поиска на площади.

Для определения наряда сил входим в номограмму с вероятностью обнаружения (6). Из позиции 6 горизонтально проводится прямая до пересечения с кривой вероятности обнаружения, а далее вертикально вверх до линии, соответствующей площади района поиска (8), от нее горизонтально влево до линии заданной продолжительности поиска (11) и, наконец, от нее вниз до пересечения с осью поисковой производительности (12). В последней позиции снимается нужная поисковая производительность. Наряд же сил определяется делением ее на поисковую производительность одного наблюдателя.

5.3. СПОСОБЫ ПОИСКА НА ЛИНИИ (НА РУБЕЖЕ)

Организация потока одиночным наблюдателем. При поиске на линии (на рубеже) наблюдатель, как правило, должен обнаружить или не допустить проход объекта поиска через некоторый рубеж. Эту задачу можно решить двумя способами: 1) курсами, перпендикулярными вероятным курсам объекта поиска (линейное патрулирование или патрулирование на линии); 2) перекрестными галсами (патрулирование «восьмеркой» или перекрестное патрулирование).

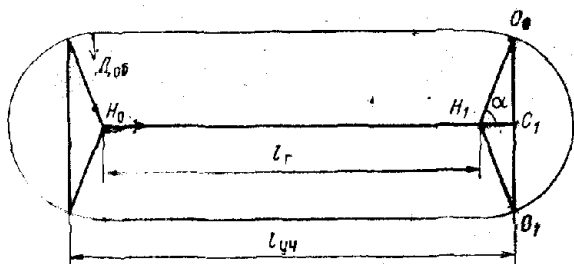


Рис. 5.7. Поиск курсами, перпендикулярными вероятным курсам объекта поиска.

При организации поиска курсами, перпендикулярными вероятным курсам прорывающихся объектов поиска, определяется длина галса l_r или длина участка $l_{уч}$, обслуживаемая одним наблюдателем (рис. 5.7). Эти величины определяются из требования обнаружения объекта поиска в пределах участка наблюдения.

Для выполнения этого условия наблюдатель, начав движение в точке H_0 , должен вернуться в ту же точку не позже, чем объект поиска пройдет путь O_0O_1 (рис. 5.7). В этом случае на участке $l_{уч}$ будет обеспечено обнаружение объекта поиска с вероятностью контакта. Отсюда имеем -

$$\frac{2l_r}{V_n} = \frac{O_0O_1}{V_o} \quad (5.19)$$

Из рис. 5.7 видно, что

$$l_r = l_{уч} - 2D_{об} \sin \alpha, \quad (5.20)$$

где α — вспомогательный угол,

$$O_0O_1 = 2D_{об} \sin \alpha. \quad (5.21)$$

После подстановки (5.20) и (5.21) в (5.19) получим

$$l_{yч} = D_{об} (V_n/V_o) \sin \alpha + 2D_{об} \cos \alpha.$$

Продифференцируем $l_{yч}$ по переменной α и найдем величину α , при которой $l_{yч}$ принимает максимальное значение. В результате получим

$$\alpha = \arctg (V_n/2V_o). \quad (5.22)$$

Таким образом, при поиске курсами, перпендикулярными вероятным курсам объекта поиска, формула длины участка, обеспечивающая заданную вероятность обнаружения (равную вероятности контакта), примет вид

$$l_{yч} = D_{об} \frac{V_n}{V_o} \sin \arctg \frac{V_n}{2V_o} + 2D_{об} \cos \arctg \frac{V_n}{2V_o}.$$

Заменяя

$$\arctg \frac{V_n}{2V_o} = \arccos 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{V_n}{2V_o}\right)^2},$$

получим

$$l_{yч} = \frac{V_n^2 D_{об}}{2V_o^2 \sqrt{1 + (V_n/2V_o)^2}} + \frac{2D_{об}}{\sqrt{1 + (V_n/2V_o)^2}}.$$

Обозначив V_n/V_o через m , получим

$$l_{yч} = D_{об} \sqrt{4 + m^2}. \quad (5.23)$$

Аналогично получим следующую формулу длины галса:

$$l_r = D_{об} \left(\frac{m^2 - 2m + 8}{2 \sqrt{4 + m}} \right).$$

При организации поиска на рубеже перекрестными галсами определяются следующие элементы (рис. 5.8): длина короткого галса l_1 , направление и длина перекрестного галса l_2 , длина участка $l_{yч}$.

Длина короткого галса рассчитывается таким образом, чтобы длина относительной полосы поиска на этом галсе была равна удвоенной дальности обнаружения объекта поиска, т. е.

$$l_1 = V_n \frac{2D_{об}}{V_n + V_o} = \frac{2m}{1 + m} D_{об}. \quad (5.24)$$

Направление перекрестного галса выбирается таким образом, чтобы относительная полоса поиска на этом галсе располагалась параллельно линии рубежа, т. е. линия курса наблюдателя составляла с линией рубежа угол, равный критическому

$$Q = \arcsin(V_0/V_H).$$

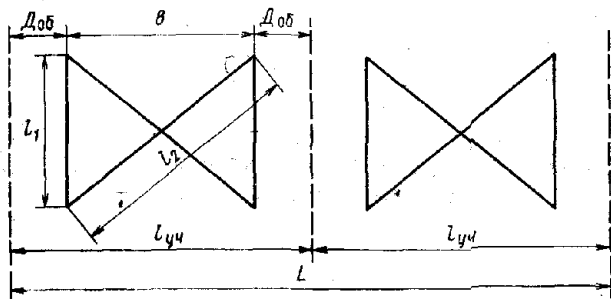


Рис. 5.8. Поиск перекрестными курсами.

Отсюда длина перекрестного галса будет

$$l_2 = \frac{l_1}{\sin Q} = \frac{2m^2}{m+1} D_{06}. \quad (5.25)$$

Длина участка определяется из требования обнаружения объекта поиска в пределах участка наблюдения с заданной вероятностью (рис. 5.8). При условии, что заданная вероятность равна вероятности контакта, а между полосами, покрываемыми в относительном движении зонами обнаружения соседних наблюдателей, не получается пропусков, этому требованию соответствует длина участка $l_{ych} = b + D_{06}$, где b — проекция перекрестного галса на направление линии рубежа.

Так как

$$b = l_2 \cos Q, \quad (5.26)$$

а, в свою очередь, $Q = \arcsin(1/m)$, получим

$$l_{ych} = D_{06} \frac{2m}{m+1} \sqrt{m^2 - 1} + D_{06}. \quad (5.27)$$

Из сравнения формул (5.23) и (5.27) видно, что длина участка в зависимости от способа маневрирования определяется величиной соответствующего коэффициента при D_{06} :

при линейном патрулировании

$$K_1 = \sqrt{4 + m^2}; \quad (5.28)$$

при патрулировании «восьмеркой»

$$K_2 = 1 + \frac{2m\sqrt{m^2 - 1}}{m + 1}. \quad (5.29)$$

По формулам (5.28) и (5.29) рассчитана табл. 5.3.

Из таблицы видно, что способ патрулирования «восьмеркой» дает преимущество по сравнению с линейным патрулированием только при $m > 1,5$. Следовательно, при прочих равных условиях организация поиска на рубеже перекрестными галсами целесообразна только, если ско-

Таблица 5.3

Значение коэффициентов K_1 и K_2 в зависимости от отношения скоростей

m	1	1,5	2
K_1	2,1	2,1	2,2
K_2	1,0	2,3	3,3

рость наблюдателя не менее чем в полтора раза больше скорости объекта поиска. В остальных случаях следует осуществлять поиск на курсах, перпендикулярных вероятным курсам объекта поиска.

Организация поиска группой наблюдателей. Минимальное число наблюдателей, необходимых для ведения поиска

на рубеже длиной L , определяется по формуле

$$N_{\text{н min}} = L/l_{\text{уч опт}}, \quad (5.30)$$

где $l_{\text{уч опт}}$ — длина участка одного наблюдателя, в пределах которого обеспечивается обнаружение объекта поиска с вероятностью контакта.

Схемы маневрирования наблюдателей в этих условиях показаны на рис. 5.7 и 5.8. Когда наличного числа наблюдателей для осуществления указанных схем недостаточно, каждому из них назначается участок наблюдения, длина которого определяется по формуле

$$l_{\text{уч}} = L/N_{\text{н}}. \quad (5.31)$$

Определение длин курсов для перекрестного патрулирования производится следующим образом [15]:

а) по формулам (5.24) — (5.26) рассчитываются величины l_1 , l_2 , b ;

б) если $b + 2D_{\text{об}} > l_{\text{уч}}$, то длина галса l_1 и l_2 назначается в соответствии с формулами (5.24) и (5.25);

в) если $b + 2D_{\text{об}} < l_{\text{уч}}$, то вычисляется поправочный

коэффициент $K = (l_{\text{уч}} - 2D_{\text{об}})/b$ для величин, полученных по формулам (5.24) и (5.25).

При организации поиска объектов, знающих о наличии на рубеже наблюдателей и пересекающих линию наблюдения в наиболее выгодной для себя точке, необходимо учитывать соотношение дальностей обнаружения объекта поиска наблюдателем и наоборот. Последнее обстоятельство обуславливает следующие ситуации: 1) нескрытый поиск — наблюдатель обнаруживается объектом поиска раньше обнаружения им объекта; 2) скрытый поиск — объект поиска обнаруживается наблюдателем раньше обнаружения им наблюдателя.

В первой ситуации объект поиска может выявить точки поворотов наблюдателей и, следовательно, наиболее уязвимые участки наблюдения, а также определить свое место относительно точек поворотов наблюдателей и выбрать выгодную для себя точку прорыва — между двумя наблюдателями или на флангах. Поскольку объект определяет свое место с некоторой ошибкой, вероятность успешного прорыва можно вычислить как вероятность попадания на заданный участок длиной $2l = l_{\text{уч}} - l_{\text{уч опт}}$, где $l_{\text{уч}}$ — длина назначенного участка наблюдения (определяется по формуле (5.31)); $l_{\text{уч опт}}$ — длина участка наблюдения, обеспечивающая вероятность обнаружения, равную вероятности контакта (определяется по формуле (5.23)).

Вполне допустимо полагать, что ошибка в месте объекта поиска подчиняется нормальному закону распределения. Тогда вероятность попадания на участок длиной $2l$, симметричный относительно центра рассеяния, можно определить по формуле

$$P_{\text{ноб}} = \Phi(l/\sigma\sqrt{2}),$$

где σ — среднеквадратическая ошибка в месте прорыва объекта поиска.

В результате найдем выражение для вероятности обнаружения объекта поиска, пересекающего рубеж между наблюдателями или на фланге линии наблюдения

$$P_{\text{об}} = 1 - \Phi(l/\sigma\sqrt{2}). \quad (5.32)$$

Анализ формулы (5.32) показывает, что объекту поиска выгодно стремиться к выявлению характера маневрирования наблюдателя к пересечению рубежа

между наблюдателями или на флангах, чтобы уменьшить ошибки в месте прорыва. Поэтому, организуя поиск, следует стремиться поставить объект поиска в такие условия, чтобы последний вынужден был пересекать рубеж относительно наблюдателей случайным образом. Подобные условия будут складываться, если объект поиска не может устанавливать точки поворотов из-за их перенесения на линии наблюдения или изменения скорости, маневра курсом и т. д.

Рассмотрим эффект от перенесения точек поворотов, которое целесообразно выполнять на каждом цикле, случайно выбирая величину переноса от 0 до l . Обозначим через x случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0, 1]$. Тогда при случайном выборе x величина переноса будет равна xl . Следовательно, на одном фланге участка наблюдения длина участка прорыва станет равна $l - xl = l(1 - x)$, а на втором $l + xl = l(1 + x)$. На основании последнего, принимая, что объект поиска равновероятно осуществляет прорыв на каждом из флангов, получаем следующее выражение для вероятности обнаружения $P(x)$ при случайном переносе точек поворотов:

$$P(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{l(1-x)}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{l(1+x)}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) \right]$$

или

$$P(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{l(1-x)}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{l(1+x)}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.33)$$

где σ_x — среднеквадратическая ошибка в определении местоположения объекта поиска относительно точек поворотов наблюдателей с учетом их переноса.

Анализ формулы (5.33) показывает, что вероятность обнаружения объекта поиска увеличивается за счет увеличения ошибок в определении его местоположения. Следовательно, перенос точек поворотов наблюдателей целесообразен.

При опережении наблюдателем объекта поиска последний вынужден пересекать линию наблюдения случайным образом. Казалось бы, в этом случае можно полагать, что распределение мест прорыва объекта поиска через рубеж подчинено закону равномерной плотности и расчет элементов поиска ($l_{\text{уч}}$ и l_p) следует производить по обычным формулам. Однако подобная идеализация поисковой ситуации накладывает сильные

ограничения на область применения полученных рекомендаций. Они оказываются правомерными только для поиска неуклоняющихся целей. Если же объект поиска сознательно совершает случайные действия, или, как принято говорить, «рандомизирует»¹ свои действия, то эффективность способа поиска, основанного на гипотезе равномерного распределения мест прорыва, оказывается очень низкой. Поэтому во второй ситуации более правомерно считать, что поиск выполняется в условиях неопределенности, т. е. распределения мест прорыва объекта через рубеж неизвестны. Эта ситуация соответствует конфликту между двумя сторонами, одна из которых выбирает место прорыва, а другая — способ поиска на рубеже, располагая N_n однородными наблюдателями. При этом стороны должны сохранять полную скрытность выбранных способов действия и поэтому вынуждены принимать решение в условиях неопределенности.

Таким образом, традиционная постановка задачи поиска на рубеже заменяется теоретико-игровым подходом, при котором выявляется наименее благоприятное распределение значений неуправляемых переменных, и в этих условиях находится оптимальное действие. Для построения теоретико-игровой модели конфликтной ситуации должны быть сформулированы правила игры, т. е. система условий, определяющая возможные варианты действий игроков, последовательность ходов, объем информации каждого игрока о поведении другого и о функции выигрыша. Сформулируем эти правила.

Пусть сторона, осуществляющая поиск, назначает для линейного или перекрестного патрулирования i -го наблюдателя ($i=1, \dots, N_n$) любую точку интервала $[0, L]$, которая принимается за центр участка $l_{уч}$, обеспечивающего достоверное обнаружение объекта. В свою очередь, объект поиска выбирает любую точку для прорыва того же интервала $[0, L]$. Тогда правомерно считать, что объект будет обнаружен при расстоянии наблюдателя от точки прорыва, не превышающем $l_{уч}/2$. Условимся, что сторона, выполняющая поиск — игрок I, а объект поиска — игрок II. Стратегией игрока I является набор N_n точек из отрезка $[0, L]$ или вектор $x = (x_1, \dots, x_{N_n})$, $0 \leq x_i \leq L$; $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N_n}$ (наб-

¹ random — случай (англ.).

людатель i осуществляет маневрирование относительно точки x_i , принимая точку x_i за центр участка). Стратегией игрока II является выбор точки прорыва или числа y_i из отрезка $[0, L]$.

Для описания оптимальных стратегий игроков определим точки

$$x_m = \frac{l_{yq}}{2} + \frac{m(L - l_{yq})}{n-1}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$y_j = \frac{jL}{n-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$n = \begin{cases} \frac{L}{l_{yq}}, & \text{если } \frac{L}{l_{yq}} \text{ — целое число,} \\ \left[\frac{L}{l_{yq}} \right] + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.34)$$

Очевидно, что $N_n < n$ и поэтому наблюдатели не могут осуществлять поиск относительно каждой точки x_m .

Обозначим через $F(x_{m_1}, \dots, x_{m_{N_n}})$, $x_{m_i} \neq x_{m_j}$, стратегию игрока I, состоящую в том, что он с вероятностью, равной единице, выбирает векторы $(x_{m_1}, \dots, x_{m_{N_n}})$, число которых равно числу всех сочетаний $C_n^{N_n}$ из n элементов по N_n , т. е.

$$C_n^{N_n} = n! / N_n! (n - N_n)!.$$

Соответственно обозначим через $G(y_j)$ стратегию игрока II, состоящую в том, что он с вероятностью, равной единице, выбирает точку y_j . Число таких стратегий равно n .

Обозначим через F^* стратегию игрока I, применяя которую, он с вероятностью $1/C_n^{N_n}$ выбирает каждую из стратегий $F(x_{m_1}, \dots, x_{m_{N_n}})$. Соответственно через G^* обозначим стратегию игрока II, состоящую в том, что он с вероятностью $1/n$ применяет каждую из стратегий $G(y_j)$. Как показано в [2], стратегии F^* и G^* являются оптимальными стратегиями игроков I и II соответственно, а значение игры равно N_n/n . Как следствие,

для $N_n=1$ получим, что значение игры равно $1/n$, а пара оптимальных стратегий игроков I и II представляет ступенчатые функции распределения следующего вида:

$$F^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_{x_i}(x), \quad (5.35)$$

$$G^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n J_{y_j}(y). \quad (5.36)$$

Таким образом, при организации поиска во второй ситуации определяются точки x_m и перечисляются варианты распределения наблюдателей на рубеже. Затем с вероятностью $1/\bar{C}_n^{N_n}$ выбирается один из вариантов и рассчитывается вероятность обнаружения по формуле

$$P_{об} = N_n/n. \quad (5.37)$$

В свою очередь, объект поиска для прорыва рубежа выбирает с вероятностью $1/n$ одну из точек y_j .

Пример 5.1. Пусть для поиска на рубеже, длина которого $L=100$ миль, выделен один наблюдатель с $l_{уч}=42$ мили. Определить участок наблюдения на рубеже.

Решение. Для принятых условий имеем $n=3$. Находим оптимальную стратегию наблюдателя $F^* = \frac{1}{3} J_{21} + \frac{1}{3} J_{50} + \frac{1}{3} J_{79}$ и оптимальную стратегию объекта поиска

$$G^* = \frac{1}{3} J_0 + \frac{1}{3} J_{50} + \frac{1}{3} J_{100}.$$

Следовательно, наблюдатель должен с вероятностью $1/3$ выбрать точку, удаленную от одной границы рубежа на 21 милю, точку, удаленную от той же границы на 50 миль, и точку, удаленную на 79 миль. Затем относительно выбранной точки осуществлять маневрирование курсами, перпендикулярными вероятным курсам объекта поиска. В свою очередь, объект поиска должен с вероятностью $1/3$ прорывать рубеж по правой границе, по левой границе и посередине рубежа. Вероятность обнаружения (значение игры) в этом случае будет $1/3$.

Дальнейший анализ теоретико-игровой модели поиска на рубеже показывает, что изменение, увеличение или уменьшение длины участка до некоторого предела, а именно до тех пор, пока n не станет целым числом (до величины $l_{уч}=33,4$ мили в примере 5.1), не сказывается на значении игры, т. е. на эффективности поиска.

Это обусловлено тем, что значение игры в данном случае является дискретной величиной. Последнее обстоятельство можно использовать для выбора оптимальной скорости поиска, при которой обеспечивается требуемая дальность обнаружения и скрытность поиска.

Эшелонирование разнородных наблюдателей по глубине при организации поиска на рубеже. При эшелонировании разнородных наблюдателей по глубине вероятность обнаружения объекта поиска хотя бы одним наблюдателем определяется по формуле

$$P_{об} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i), \quad (5.38)$$

где P_i — вероятность обнаружения наблюдателем i -го типа; n — число типов наблюдателей.

Очевидно, что вероятность обнаружения объекта поиска через рубеж, особенно, когда время поддержания. Кроме того, эшелонирование по глубине может применяться для определения направления движения объекта поиска через рубеж, особенно, когда время поддержания контакта (время наблюдения) не обеспечивает решения этой задачи. Можно полагать, что для определения направления движения объекта поиска через рубеж достаточно иметь подряд по крайней мере два обнаружения (например, на первой и второй линиях или третьей и второй и т. д.). Организация подобных поисковых действий не всегда бывает тривиальной.

Предположим, что для организации поиска на рубеже с задачей обнаружения объекта подряд не менее двух раз выделены наблюдатели двух типов, которые должны, эшелонируясь по глубине, располагаться на трех линиях наблюдения. Очевидно, если вероятность обнаружения объекта каждым типом одинакова, то с точки зрения поставленной задачи безразлично, в какой комбинации эшелонировать наблюдателей. Например, первую и третью линии наблюдения можно выделить для первого типа, а вторую — для второго или же на первой и третьей линиях расположить наблюдателей второго типа, а на второй — первого типа.

Предположим теперь, что $P_1 > P_2$, где P_1 и P_2 — вероятности обнаружения объекта поиска наблюдателем первого и второго типов соответственно. Пусть M — наблюдатель первого типа, N — наблюдатель второго типа, W и R — обнаружение и необнаружение объекта

Исходы и их вероятности для каждой комбинации

Комбинация			Вероятность	Комбинация			Вероятность
М	Н	М		Н	М	Н	
W	W	W	$P_1 P_2 P_1$	W	W	W	$P_2 P_1 P_2$
W	W	R	$P_1 P_2 (1 - P_1)$	W	W	R	$P_2 P_1 (1 - P_2)$
R	W	W	$(1 - P_1) P_2 P_1$	R	W	W	$(1 - P_2) P_1 P_2$

Вероятность иметь подряд не менее двух обнаружений при комбинации

$M - N - M$	$N - M - N$
$P(MNM) = P_1 P_2 (2 - P_1)$	$P(NMN) = P_1 P_2 (2 - P_2)$

поиска, P — общее обозначение вероятности обнаружения. Принимаем, что обнаружения объекта независимы. Найдем для каждой комбинации распределения наблюдателей на линиях поиска (« $M-N-M$ » и « $N-M-N$ ») вероятность обнаружения объекта не менее двух раз подряд. Аналогичная задача была рассмотрена Ф. Мостеллером [14]. Определим исходы и их вероятности для каждой комбинации, при которых объект будет обнаруживаться не менее двух раз подряд (табл. 5.4).

Так как $P_1 > P_2$ и $2 - P_1 < 2 - P_2$, то $P(M-N-M) < P(N-M-N)$. Следовательно, наблюдателей целесообразно располагать по схеме $N-M-N$. Например, если $P_1 = 0,8$ и $P_2 = 0,4$, то $P(M-N-M) = 0,384$, а $P(N-M-N) = 0,512$.

Таким образом, большая вероятность повторного обнаружения превышает недостатки наличия на двух линиях наблюдателей второго типа, имеющих меньшую эффективность поиска, что является характерной особенностью данной поисковой ситуации. Действительно, математическое ожидание числа обнаружений при комбинации $N-M-N$ равно $2P_2 + P_1$ и оно меньше, чем математическое ожидание числа обнаружений для комбинации $M-N-M$, равное $2P_1 + P_2$. Однако вероятность решения поставленной задачи будет больше при комбинации $N-M-N$. Так, для условий примера при $P_1 = 0,8$ и $P_2 = 0,4$ математические ожидания равны 2 и 1,6, а вероятности 0,384 и 0,512 соответственно. Это «проти-

воречие» и является характерной особенностью рассмотренной поисковой ситуации, придающей ей специальный интерес.

5.4. СПОСОБЫ ПОИСКА ПО ДАННЫМ ПЕРВИЧНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ (ВТОРИЧНЫЙ ПОИСК ИЛИ ПОИСК «ПО ВЫЗОВУ»)

Поиск в вероятном секторе объекта поиска. Поиск по данным первичного обнаружения (по вызову) организуется при наличии данных о месте и элементах движения объекта поиска или только о месте его нахождения на определенный момент времени. В зависимости от объема имеющейся информации об объекте поиска существуют два способа поиска по данным обнаружения, других сил: поиск в вероятном секторе курсов объекта и поиск в районе обнаружения объекта.

Поиск в вероятном секторе курсов объекта поиска применяется при наличии движения объекта. Поиск этим способом выполняется выходом на вероятный курс объекта впереди него с последующим движением прямо навстречу. Искомыми элементами при этом являются:

- сектор, в пределах которого вероятно движение объекта;

- расстояние, на котором наблюдатель должен выйти вперед по курсу объекта;

- курс и время для выхода вперед объекта;

- рубеж встречи с объектом;

- расстояние между наблюдателями при движении навстречу объекту.

Для определения сектора вероятного движения объекта наносится его место на данный момент в точке O и проводится его курс K_0 (рис. 5.9). Около точки O радиусом, равным предельной ошибке f_0 в месте объекта и наблюдателя (наблюдателей), описывается окружность. Затем к окружности радиусом f_0 проводятся две касательные под углом ΔK_0 к курсу объекта K_0 . Эти касательные и образуют сектор, в пределах которого и должен осуществляться поиск.

Для определения расстояния, на котором наблюдатель (наблюдатели) должен выйти на курс объекта поиска вперед его, исходное место последнего принимается в точке O . Берется максимальная скорость хода и рассчитывается путь O_0O_1 , который он может пройти

за время до начала движения наблюдателя. Затем этот путь суммируется с дальностью обнаружения объекта $D_{об}$ и тем самым определяется расстояние $O_1H'_2$, на котором наблюдатель должен выйти на курс объекта поиска вперед его (рис. 5.9).

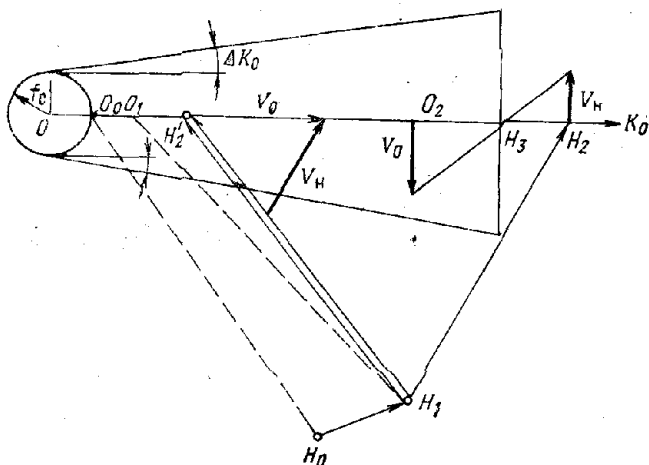


Рис. 5.9. Поиск в вероятном секторе курсов объекта поиска.

Для определения курса выхода наблюдателя вперед по курсу объекта поиска в заданном расстоянии $O_1H'_2$ решается задача на сближение вплотную с точкой H'_2 , для чего при этой точке строятся треугольник скоростей и подобный ему треугольник путей $H_1H'_2H_2$ [15]. Сторона этого треугольника H_1H_2 своим направлением определит курс выхода, а своей величиной — расстояние, которое надо пройти до заданной точки H_2 . Время, необходимое для выхода вперед по курсу объекта поиска, определяется по формуле $t_0 = H_1H_2/V_n$, где V_n — скорость хода наблюдателя (наблюдателей) при выходе на курс объекта поиска.

При выходе наблюдателя на курс объекта ему целесообразно двигаться контркурсом. В случае группы наблюдателей возникает необходимость определить расстояния между ними, при которых вероятность обнаружения объекта будет максимальной.

Предположим, что наблюдатели вышли на вероятный курс объекта (рис. 5.9), имея опережение в дальности

сти обнаружения. Найдем положение центра линии поиска в момент прихода объекта на линию поиска (рубеж встречи). Для этого необходимо из точки O_2 по любому направлению отложить величину вектора V_0 , а из точки H_2 параллельно вектору V_0 — величину вектора V_n . Соединив концы векторов прямой, найдем искомое положение центра линии поиска в точке ее пересечения с вероятным курсом (точка H_3). Допустимо считать [9], что на рубеже встречи плотность распределения вероятности места объекта поиска будет иметь такой вид:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.39)$$

где σ — среднеквадратическое отклонение, обусловленное ошибками в месте и курсе объекта поиска; x — траверзное расстояние до вероятного курса объекта.

Как показано в [26], вероятность обнаружения объекта на линии поиска $Q(\varphi)$ находится по формуле

$$Q(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) [1 - e^{-\varphi(x)}] dx, \quad (5.40)$$

где $\varphi(x)$ — плотность поисковых усилий в точке H_3 , удовлетворяющая условиям

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 2D_{об}N_n. \quad (5.41)$$

Выражение (5.40) является критерием эффективности поиска в зависимости от распределения наблюдателей на линии поиска. Очевидно, что максимальная величина этого критерия эффективности будет соответствовать оптимальному размещению наблюдателей на линии поиска, которое определяется функцией $\varphi(x)$.

Таким образом, необходимо найти функцию $\varphi(x)$, которая максимизирует $Q(\varphi)$. Необходимым условием максимизации вероятности $Q(\varphi)$ является постоянство для каждой точки линии поиска произведения плотности распределения вероятности нахождения объекта поиска на вероятность его необнаружения [26], т. е.

$$P(x) e^{-\varphi(x)} = \text{const при } \varphi(x) \geq 0. \quad (5.42)$$

Обозначим множество точек x , где функция $\varphi(x)$, положительна, через A . Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} A &= \{x: \ln p(x) > \ln \lambda\}; \\ \varphi(x) &= \ln P(x) - \ln \lambda; \\ \int_A \ln p(x) dx &= A \ln \lambda, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где λ — постоянная величина для данных условий, определяющая распределение наблюдателей.

Величины A и λ находятся путем графического решения системы (5.43). Для этого строится (рис. 5.10) кривая натурального логарифма плотности распределения вероятности $P(x)$. Затем проводится горизонтальная линия NN , которая перемещается вверх или вниз параллельно оси x до тех пор, пока площадь (заштрихованная на рис. 5.10) над этой линией не будет количественно равна в принятых единицах измерения произведению $2D_{об}N_H$ (5.43). В результате определяется интервал A ширины сектора движения объекта поиска, в пределах которого следует распределять наблюдателей: $A = (N_H - 1)d + 2D_{об}$.

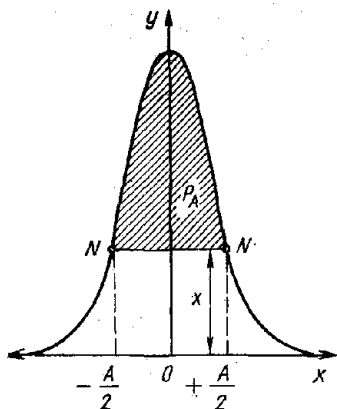


Рис. 5.10. Определение интервала A ширины сектора движения объекта поиска.

Следовательно, расстояние между наблюдателями будет определяться по формуле

$$d = (A - 2D_{об}) / (N_H - 1). \quad (5.44)$$

Вероятность обнаружения объекта поиска в этом случае, как показано в [2], будет

$$P_A = \Phi(A/2\sigma\sqrt{2}) - A\lambda, \quad (5.45)$$

где

$$\sigma = \sqrt{m_H^2 + m_0^2 + S_K^2 + \text{tg}^2 \sigma_0}, \quad (5.46)$$

где, в свою очередь, m_0 — среднеквадратическая ошибка местоположения объекта в момент потери контакта;

m_n — среднеквадратическая ошибка местоположения наблюдателя в момент начала поиска; σ_0 — среднеквадратическая ошибка в определении курса объекта; S_k — расстояние между местом объекта в момент потери контакта и рубежом встречи.

Вероятность обнаружения объекта при выходе на ее вероятный курс одного наблюдателя определяется по формуле

$$P_{об} = \Phi(2D_{об}/\sigma\sqrt{2}). \quad (5.47)$$

В условиях, когда в обнаружении опережает объект поиска, расстояния между наблюдателями должны обеспечить максимальное значение вероятности обнаружения объекта, которую можно определить по формуле

$$P_{об} = \Phi\left(\frac{(N_n - 1)d + 2D_{об}}{2\sigma\sqrt{2}}\right) P_{нук}, \quad (5.48)$$

где d — расстояние между наблюдателями, обеспечивающее максимальное значение вероятности $P_{нук}$; $P_{нук}$ — вероятность неуклонения, рассчитываемая по формуле (3.138).

Поиск в вероятном секторе курсов объекта при $V_n > V_0$ и $D_{об} > D_y$ выполняется путем последовательного обследования этого сектора. Если $V_n < V_0$ или $D_{об} < D_y$, то поиск выполняется выходом на середину сектора впереди объекта с последующим движением навстречу.

Исходными элементами при расчете поиска путем последовательного обследования вероятного сектора курсов объекта являются: сектор поиска; точка начала поиска и курс выхода в нее; последовательные курсы поиска в пределах сектора; время, необходимое для выполнения маневра поиска.

Сектор поиска определяется возможными предельными курсами объекта поиска, проведенными из точки O_0 местоположения объекта в момент потери контакта (рис. 5.11).

Точка начала поиска и курс выхода в нее определяются из гипотезы движения объекта поиска из точки O_0 курсом K_{01} , расположенным по ближайшей границе сектора поиска. Для этого решается задача на сближение вплотную при максимальной скорости объекта (рис. 5.11). В результате находим курс выхода в точку H_1 начала поиска на ближайшей границе сектора, подлежащего обследованию.

ную переменных курсов $H_1H_2H_3H_4H_5$. Нетрудно убедиться, что если объект поиска из точки O_0 следует курсом K_0 со скоростью V_0 , то встреча должна произойти в точке H_1 . Если к моменту выхода в точку H_5 объект обнаружен не будет, то можно предполагать, что его скорость меньше принятой в расчет. Поэтому целесообразно продолжить поиск, исходя из предположения, что объект поиска из точки O_0 , имея минимальную скорость, шел курсом K_{02} до момента прихода наблюдателя в точку H_5 .

Затем определяются радиусы $r''_i = (V_0 - \Delta V_0)(t_1 + i\Delta t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, где t_1 — время выхода наблюдателя в точку H_6 ($i = 0$).

После этого, как было описано выше, определяется ломаная переменных курсов $H_6H_7H_8H_9$, по которой осуществляется поиск в обратном направлении.

Поиск для группы наблюдателей рассчитывается относительно средней точки строя и маневрирование выполняется так, чтобы средняя точка строя наблюдателей двигалась по рассчитанным курсам.

Время, необходимое для поиска, складывается из времени t_0 выхода в точку начала поиска H_1 и времени обследования сектора поиска переменными курсами от точки H_1 до точки H_9 (рис. 5.11).

Поиск в районе обнаружения объекта. Поиск в районе обнаружения объекта применяется при наличии данных о месте объекта поиска и превышении скорости наблюдателя объекта. Здесь возможны два способа маневрирования при поиске: по спирали и на параллельных курсах. Выбор того или иного способа определяется в зависимости от величины $P_{об}$.

При поиске по спирали относительно скорости объекта можно допустить, что она не менее $V_{0\min}$ и не более $V_{0\max}$, а все курсы объекта в пределах от 0 до 2π равновероятны. Ошибки в месте обнаружения объекта допустимо считать (см. § 1.3) подчиняющимися нормальному круговому закону на плоскости, плотность распределения которого выражается формулой (1.18). В этом случае плотность распределения вероятных мест объекта поиска через промежуток времени t после обнаружения находится по формуле (1.24).

Как показано в § 4.5, максимум плотности вероятности с течением времени смещается от центра рассеяния и уменьшается по величине. В связи с этим область наиболее вероятных мест объекта поиска с течением времени

также смещается в радиальном направлении от первоначального обнаружения.

Таким образом, поиск в районе обнаружения целесообразно проводить в местах с наибольшей вероятностью нахождения объекта. Поскольку максимум плотности вероятности смещается в радиальном направлении, то поиск должен проводиться последовательно в ряде колец увеличивающегося диаметра. Следовательно, траектория наблюдателей должна представлять собой кривую, удаляющуюся от места первоначального обнаружения объекта со скоростью смещения максимума плотности распределения ее вероятных мест и обегаящую при этом все кольцевые участки возможных положений объекта.

В большей степени для этого подходит логарифмическая спираль, имеющая уравнение

$$r = r_0 e^{\rho \varphi}, \quad (5.50)$$

где r — текущий радиус-вектор спирали (удаление данной точки на спирали от места первоначального обнаружения объекта); φ — угол поворота спирали; ρ — параметр спирали, определяющий ее форму и скорость увеличения текущего радиус-вектора; r_0 — радиус-вектор спирали при $\varphi = 0$.

Интересно отметить, что рассмотренный способ поиска переменными курсами в секторе вероятных курсов объекта как раз и представляет собой маневрирование по аппроксимированной (кривая заменена ломаными курсами) логарифмической спирали. Действительно, в курсах маневрирования показано [15], что при поиске переменными курсами курсовой угол наблюдателя относительно места первоначального нахождения объекта все время одинаков. Но траектория маневрирования при постоянном курсовом угле и есть логарифмическая спираль.

Для расчетов, связанных с поиском по спирали, необходимо в любой момент времени после первоначального

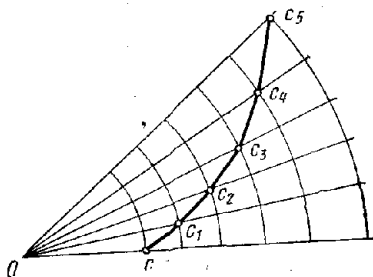


Рис. 5.12. Расчет поиска по спирали.

обнаружения определять ее вероятное удаление от точки потери контакта. Величина этого расстояния рассчитывается по формуле

$$r = V_0 \Delta t. \quad (5.51)$$

Расчет спирали производится следующим образом (рис. 5.12):

1) определяются удаления наивероятнейших мест нахождения объекта (r) через равные промежутки времени; 2) полученными величинами r как радиусами из места первоначального обнаружения объекта (точка O) описываются соответствующие окружности; 3) дуги окружностей делятся на равное число частей и точки деления соединяются между собой плавной кривой.

При выполнении поиска по спирали маневрирование осуществляется по хордам, спрямляющим спираль.

При поиске на параллельных курсах [15] суть расчетов сводится к тому, чтобы к моменту прибытия наблюдателей к линии начала поиска AA_1 (рис. 5.13) обеспечить их перестроение в строй с такой шириной полосы обследования, на которую объект не смог бы выйти. Рассмотрим выполнение подобных расчетов.

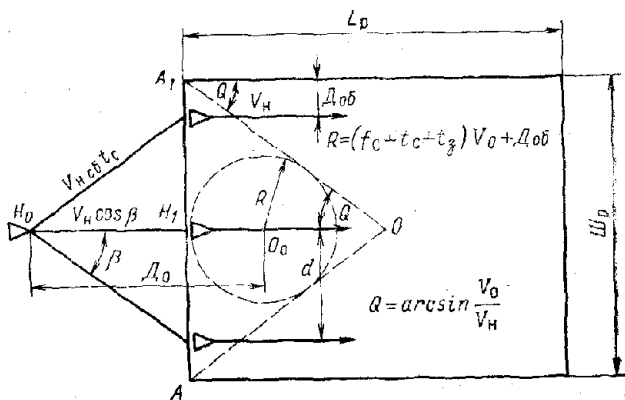


Рис. 5.13. Расчет поиска на параллельных курсах.

Группа наблюдателей может прибыть в точку развертывания (точка H_0) в строю кильватера (один за другим) или фронта (рис. 5.13). В первом случае для группы из трех наблюдателей определяются: угол отворота крайних судов β , время сближения $t_{сб}$ (промежуток

времени от момента прибытия наблюдателей в точку H_0 до момента прихода их на линию начала поиска), ширина района поиска Π_p , продолжительность поиска t_n и длина района L_p . Для группы более трех наблюдателей дополнительно находится расстояние между наблюдателями d , углы отворота внутренних наблюдателей и скорость их сближения $V_{нсб}$.

Во втором случае, когда наблюдатели следуют в строю фронта, перестроение может не потребоваться. Такое положение возникает при условии, если начальная дистанция D_0 (рис. 5.14) равна или меньше дистанции захвата $D_{захв}$ — расстояния между поисковым строем и местом потери контакта с объектом поиска, при котором объект лишен возможности уклониться от наблюдателей, обойдя их строй. Величина $D_{захв}$ зависит от соотношения скоростей, ошибки в месте объекта, ширины полосы и времени запаздывания t_3 (промежуток времени от мо-

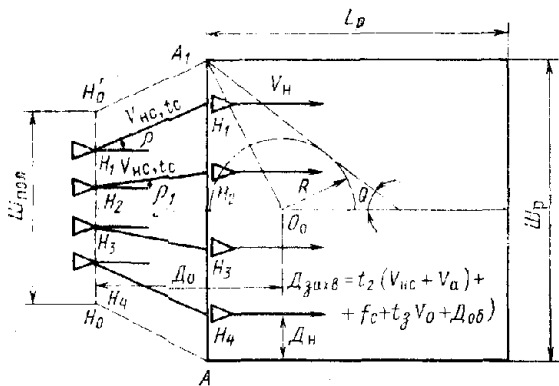


Рис. 5.14. Расчет поиска на параллельных курсах.

мента потери контакта с объектом в точке O до момента прибытия наблюдателей в точку H_0).

Следовательно, необходимо прежде всего определить $D_{захв}$. Если $D_{захв} > D_0$, то перестроения делать не нужно. Если же $D_{захв} < D_0$, надо произвести расчеты для увеличения расстояния между наблюдателями, т. е. найти углы отворота, время сближения, ширину и длину района, продолжительность поиска. Для выполнения этих расчетов можно использовать специальную номограмму и график [10].

Номограмма (рис. 5.15) предназначена для определения дистанции захвата, длины района, времени сближения и продолжительности поиска при $D_0 \leq D_{\text{захв}}$. На горизонтальной оси номограммы расположена шкала времени (слева) и шкала отношений скорости объекта поиска и поисковой скорости наблюдателей. Вертикальная ось — шкала расстояния. В левой части номограммы приведены наклонные прямые, каждая из которых соответствует определенной скорости, в правой части — кривые, построенные по формуле

$$\alpha = \frac{\text{Ш}_{\text{пол}}}{2 \text{tg } \theta},$$

где $\theta = 45^\circ + \frac{1}{2} \arcsin(V_0/V_n)$.

Пример 5.1. Рассчитать дистанцию захвата и соответствующие ей элементы поиска, если скорость объекта $V_0=9$ узл, скорость наблюдателей $V_n=22,5$ узл, скорость сближения $V_{nc}=30$ узл, дальность действия средств обнаружения наблюдателя $D_{об}=10$ каб, суммарная ошибка в месте потери контакта на момент прибытия наблюдателей в точку H_0 — $\sigma=10$ каб и ширина полосы поиска $\text{Ш}_{\text{пол}}=80$ каб.

Решение. На горизонтальной шкале номограммы (рис. 5.15) находим точку 1 ($V_0/V_n=9/22,5=0,4$) и идем вверх до кривой, соответствующей $\text{Ш}_{\text{пол}}=80$ каб. Полученную точку 2 проецируем на вертикальную шкалу и находим точку 3. От нее вниз отклады-

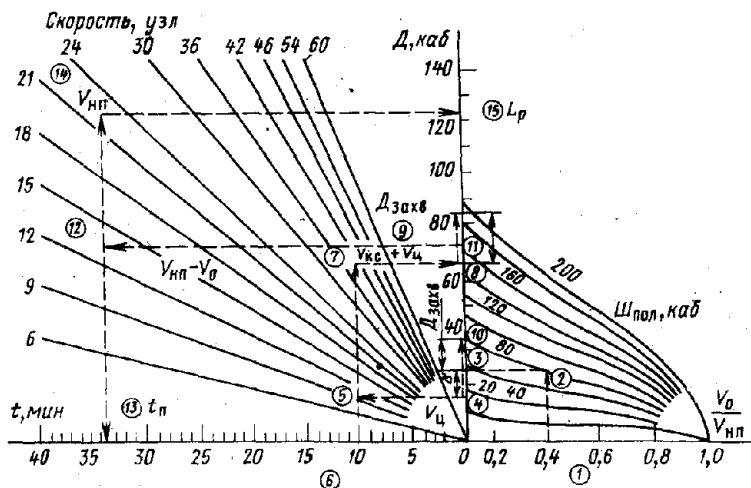


Рис. 5.15. Номограмма для расчета поиска на параллельных курсах. $V_{nc}=24$ узл, $V_{np}=14$ узл, $V_a=6$ узл.

ваем величину $\sigma = 10$ каб и получаем точку 4, через которую проводим горизонтальную прямую до пересечения ее с наклонной прямой (в точке 5), соответствующей скорости объекта $V_0 = 9$ узл. Спроектировав точку 5 на горизонтальную шкалу, снимаем с нее время сближения $t_c = 10$ мин (точка 6). Затем находим дистанцию захвата. Для этого из точки 5 следуем вверх до наклонной прямой с цифрой «39» ($V_{nc} + V_0 = 39$). Найденную точку 7 проектируем на вертикальную шкалу и получаем точку 8, от которой откладываем вверх по шкале величину $\sigma + D_{об} = 20$ каб. Отсчет шкалы (точка 9) дает значение $D_{зах}$, равное 88 каб. Затем определяем продолжительность поиска t_n и длину района L_p . Для этого из точки 3 откладываем вверх по шкале величину $D_{об} = 10$ каб, а из полученной точки 10 — отрезок 0—10 (расстояние от нулевого отсчета номограммы до точки 10) и находим точку 11. От нее следуем влево до наклонной прямой, соответствующей разности скоростей $V_n - V_0$ (13,5 узл). Точку 12 проектируем на горизонтальную шкалу и считываем с нее $t_n = 34$ мин (точка 13), а идя от нее вверх до наклонной прямой, соответствующей поисковой скорости наблюдателей $V_n = 22,5$ узл, находим точку 14. Проектируя эту точку на вертикальную шкалу, снимаем с нее длину района $L_p = 127$ каб (точка 15).

5.5. ДИСКРЕТНЫЙ ПОИСК

Сущность дискретного поиска состоит в чередовании обследования среды средствами наблюдения на месте (или на малом ходу) с перемещением в следующую позицию наблюдения на большой скорости хода. Во время перемещения наблюдение прекращается, и поэтому обнаружение возможно только в период обследования водной среды.

Основным элементом дискретного поиска является время одного цикла (t_n) наблюдения, которое включает время на обследования среды ($t_{обс}$) и время перехода в очередную позицию наблюдения ($t_{пер}$):

$$t_n = t_{обс} + t_{пер}.$$

В свою очередь, время перехода в очередную позицию определяется по формуле $t_{пер} = l/V_{пер}$, где l — расстояние между соседними позициями наблюдения; $V_{пер}$ — скорость наблюдателя на переходе.

Вероятность обнаружения объекта $P_{об}(t)$ в заданном районе при дискретном поиске можно определить по формуле, аналогичной (4.9):

$$P_{об}(t) = 1 - \exp(-N\sigma t/t_n),$$

где N_0 — математическое ожидание числа обнаружений за один цикл.

Предположим, что объекты в районе распределены равномерно и от поиска не уклоняются, а их курсы равновероятны в пределах от 0 до 2π . Тогда, в соответствии с гл. 3, математическое ожидание числа обнаружений за один цикл будет определяться по формуле

$$N_0 = \left[\pi D_{об}^2 + \left(\frac{V_{обс}^2 + V_o^2}{V_{обс} + V_o} + 0,3 \sqrt{V_{обс} V_o} \right) t_{обс} \right] - S_{пер} \left] \frac{N_{ц}}{S_p} \right. \quad (5.52)$$

где $V_{обс}$ — скорость наблюдателя при обследовании среды; S_p — площадь района поиска; $S_{пер}$ — площадь перекрытия двух смежных позиций наблюдения.

Величина перекрытия определяется из геометрических соображений:

$$S_{пер} = D_{об}^2 \left[2 \arccos \frac{l}{2D_{об}} - \sin \left(2 \arccos \frac{l}{2D_{об}} \right) \right]. \quad (5.53)$$

Расстояние между позициями наблюдения при дискретном поиске в заданном районе неуклоняющихся объектов можно определить на основании следующего.

Предположим, что наблюдатель в очередной позиции обследовал среду и объекта поиска не обнаружил. В подобной ситуации можно полагать, что объект, имея среднюю относительную скорость V_p , находится на границе зоны обнаружения радиусом $D_{об}$. Поэтому следующее обследование зоны обнаружения должно выполняться не менее, чем через среднее ожидаемое время нахождения объекта в этой зоне. Отсюда $l = (M[l]/V_p) V_{пер}$, где $M[l]$ — средняя длина относительного пути объекта поиска в зоне обнаружения.

Для определения $M[l]$ будем исходить из того, что она равна средней длине хорды окружности радиусом $D_{об}$, взятой случайно в этой окружности. Как известно, уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = D_{об}^2$. Возьмем на этой окружности две точки с координатами

$$x_1 = D_{об} \cos \theta_1; \quad x_2 = D_{об} \cos \theta_2; \quad (5.54)$$

$$y_1 = D_{об} \sin \theta_1; \quad y_2 = D_{об} \sin \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 — случайные углы между направлением радиуса на эти точки и осью x .

Известно также, что расстояние между двумя точками на плоскости определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5.55)$$

После подстановки (5.54) в (5.55) и преобразований получим

$$d = 2D_{об} \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right).$$

Отсюда $M[I]$ найдем усреднением по окружности:

$$M[I] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} 2D_{об} \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) d\theta_2 d\theta_1 = \frac{4D_{об}}{\pi}. \quad (5.56)$$

Дискретный поиск уклоняющихся целей может выполняться в двух ситуациях: $D_{об} > D_y$ (скрытый дискретный поиск) и $D_{об} < D_y$ (нескрытый дискретный поиск). Рассмотрим выполнение скрытого дискретного поиска в районе (рис. 5.16).

Пусть в точке H_1 наблюдатель обследовал среду и объекта не обнаружил. Тогда очевидно, что переход в следующую позицию наблюдения следует выполнять таким образом, чтобы не быть обнаруженным. Это можно обеспечить, если в относительном движении зона, в пределах которой наблюдатель может быть обнаружен объектом (заштрихованная на рис. 5.16), не выйдет за пределы окружности радиусом $D_{об}$. Следовательно, время перехода при выполнении скрытого циклического поиска должно определяться по формуле $t_{пер} = (D_{об} - D_y) / V_p$. Отсюда расстояние между двумя позициями наблюдения при скрытом дискретном поиске можно определить по формуле $l = (D_{об} - D_y) V_{пер} / V_p$.

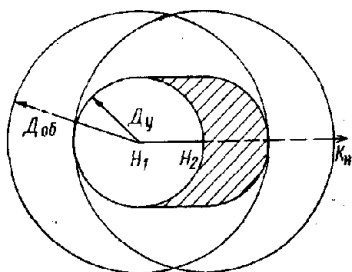


Рис. 5.16. Скрытый дискретный поиск.

При незначительном преимуществе в дальности обнаружения может оказаться более целесообразным выполнение нескрытого дискретного поиска. Рассмотрим выполнение такого поиска (рис. 5.17).

Пусть в точке H_1 наблюдатель обследовал среду и объекта не обнаружил. При последующем относительном движении наблюдатель не будет обнаруживаться объектом до точки H_2 . Из точки H_2 проведем окружность радиусом $D_{об}$, к которой под углом $Q = \arcsin(V_{oy}/V_{пер})$ (где V_{oy} — скорость объекта при уклонении) к курсу наблюдателя проведем касательные K_1K_0 и K_2K_0 . В полученный угол $K_1K_0K_2$ впишем окружность радиусом D_y и получим точку H_3 , в которой нужно обследовать среду. Тогда объект, который обнаружит наблюдателя, не сможет уклониться и, в свою очередь, будет обнаружен наблюдателем. Кроме того, будут обнаружены объекты, которые окажутся в пределах колец радиусом $D_{об}$ и D_y . Следовательно, относительное перемещение наблюдателя будет равно $H_1H_2 + H_2H_3$. Из геометрии рис. 5.17 имеем

$$H_1H_2 = D_{об} - D_y; \quad H_2H_3 = (D_{об} - D_y) / \sin Q.$$

Следовательно,

$$l = (D_{об} - D_y) (1 + 1/\sin Q). \quad (5.57)$$

Так как $\sin Q = V_{oy}/V_{пер}$, окончательно будем иметь

$$l = (D_{об} - D_y) \left(1 + \frac{V_{пер}}{V_{oy}}\right), \quad (5.58)$$

Если $D_y > D_{об}$, то расстояние между смежными позициями наблюдения целесообразно иметь равным $2D_{об}$. Тогда математическое ожидание числа обнаружений за один цикл будет определяться по формуле

$$N_o = \begin{cases} \pi D_{об}^2 \sin \left(\arcsin \frac{D_{об}}{D_y} - \arcsin \frac{V_{oy}}{V_{пер}} \right) \frac{N_b}{S_p} & \text{при } D_{об} < D_y, \frac{D_{об}}{D_y} > \frac{V_{oy}}{V_{пер}}, \\ 0 & \text{при } D_{об} < D_y, \frac{D_{об}}{D_y} \leq \frac{V_{oy}}{V_{пер}}. \end{cases} \quad (5.59)$$

Расстояние между позициями наблюдения при дискретном поиске на рубеж можно определить через среднюю длину $M[l]$ параллельных хорд окружности радиусом $D_{об}$, т. е.

$$l = (M[l]/V_p) V_{пер},$$

где

$$V_p = \sqrt{V_{\text{пер}}^2 + V_o^2}.$$

Длину параллельной хорды можно определить по формуле

$$d_x = 2 \sqrt{D_{\text{об}}^2 - x^2}.$$

Тогда среднюю длину параллельной хорды легко найти следующим образом:

$$M[l] = \int_0^{D_{\text{об}}} 2 \sqrt{D_{\text{об}}^2 - x^2} \frac{1}{2D_{\text{об}}} dx = \frac{\pi D_{\text{об}}}{2}. \quad (5.60)$$

Скорость наблюдателя, принимаемая для расчетов элементов способом дискретного поиска в районе и на

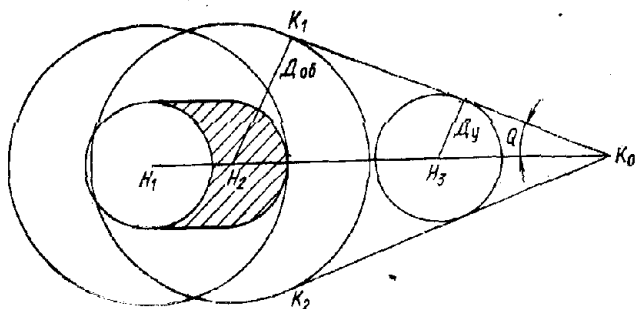


Рис. 5.17. Нескрытый дискретный поиск.

рубеже, определяется по формуле $V_{\text{ср}} = (V_{\text{пер}} t_{\text{пер}} + V_{\text{обс}} t_{\text{обс}}) / t_{\text{ц}}$, где $V_{\text{обс}}$ — скорость хода наблюдателя в период обследования среды.

Глава 6

СЛЕЖЕНИЕ ЗА ОБНАРУЖЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

6.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА СЛЕЖЕНИЯ

Математическая модель слежения за одиночным объектом. Поиск в заданном районе (на рубеже, по вызову) с вероятностью $P_{\text{об}}$ приводит к обнаружению объекта, за которым может быть организовано слежение. Задача

слежения состоит в поддержании контакта с обнаруженным объектом в течение заданного времени. Для решения этой задачи наблюдатель должен находиться относительно объекта слежения на дистанциях, не больших дальности действия своих средств обнаружения, и иметь скорость не менее скорости объекта. Однако в ряде случаев увеличение скорости ведет к уменьшению дальности действия средств обнаружения, что приводит к потере контакта. Кроме того, контакт может быть потерян из-за ошибок в определении дистанции и элементов движения объекта, изменения его курса и скорости, а также из-за различных помех. В результате наблюдатель вынужден осуществлять специальное маневрирование для восстановления контакта или переходить к вторичному поиску.

Таким образом, слежение как процесс состоит из ряда независимых обнаружений, следующих одно за другим, при каждом из которых с потерей контакта осуществляется его восстановление. В зависимости от соотношения дальностей обнаружения наблюдателя и объекта слежение может быть скрытным или нескрытным. Скрытное слежение осуществляется за пределами дальности действия средств обнаружения наблюдателя объектом, а нескрытное — после обнаружения уклоняющегося объекта или после сближения с ним в процессе скрытного слежения на дальность действия его средств обнаружения.

Для построения математической модели процесса слежения введем такие понятия, как интенсивность потерь и восстановление контактов. Элементарные вероятности потери и восстановления контакта за бесконечно малое время обозначим соответственно через μdt и λdt .

В общем случае плотность потока потерь контакта μ зависит от времени, прошедшего от начала слежения. Однако для упрощения математической модели процесса слежения эта плотность принимается за постоянную величину, обратно пропорциональную величине математического ожидания длительности наблюдения до потери контакта:

$$M[t_{\text{ин}}] = 1/\mu. \quad (6.1)$$

Плотность потока восстановления контакта (интенсивность обнаружений при вторичном поиске) λ зависит от времени, прошедшего с момента контакта. Однако,

так же как и по отношению μ , принимается допущение, что λ не зависит от времени. В этом случае она находится в обратной зависимости от величины математического ожидания длительности вторичного поиска до восстановления контактов

$$M[t_{\text{вк}}] = 1/\lambda. \quad (6.2)$$

К числу ограничений, принятых для построения модели, относится условное разделение процессов слежения на процессы при постоянном преимуществе вторичного поиска перед первичным и при кратковременном.

В первом случае предполагается, что вторичный поиск продолжается до обнаружения объекта без перехода на первичный поиск, а во втором — наблюдатель при необнаружении объекта за время восстановления контакта переходит к первичному поиску. С учетом принятых допущений и ограничений, как показал И. Я. Динер, формула для определения вероятности слежения $P_{\text{сл}}(t)$ за одиночным объектом при постоянном преимуществе вторичного поиска перед первичным имеет следующий вид:

$$P_{\text{сл}}(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} - \frac{\lambda - \gamma}{\mu + \lambda - \gamma} e^{-\gamma t} - \frac{\mu \gamma}{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda - \gamma)} e^{-(\mu + \lambda)t}, \quad (6.3)$$

где γ — плотность потока обнаружений; t — время поиска. Из формулы (6.3) следует, что с увеличением времени поиска t вероятность слежения увеличивается, стремясь при $t > 5/\gamma$ к своему предельному значению $P_{\text{сл}} = \lambda/(\lambda + \mu)$.

С учетом выражений (6.1) и (6.2) формула предельной вероятности слежения за одиночным объектом при постоянном преимуществе вторичного поиска перед первичным принимает вид

$$P_{\text{сл}} = \frac{M[t_{\text{пк}}]}{M[t_{\text{вк}}] + M[t_{\text{пк}}]}.$$

Для слежения за одиночным объектом при кратковременном преимуществе вторичного поиска перед первичным в [29] получена следующая формула:

$$P_{\text{сл}}(t) = \frac{\gamma}{\mu(1 - P_{\text{вк}}) + \gamma} [1 - \exp\{-[\mu(1 - P_{\text{вк}}) + \gamma]t\}], \quad (6.4)$$

где $P_{\text{вк}}$ — вероятность восстановления контакта.

Из формулы (6.4) при $t \rightarrow \infty$ (практически для $t > 5/[\mu(1-P_{\text{вк}})+\gamma]$) вытекает формула для предельной вероятности слежения

$$P_{\text{сл}} = \frac{\gamma}{\mu(1-P_{\text{вк}})+\gamma};$$

$$P_{\text{сл}} = \frac{M[t_{\text{пк}}]}{M[t_{\text{пк}}] + M[t_{\text{об}}](1-P_{\text{вк}})},$$

где $M[t_{\text{об}}] = 1/\gamma$ — математическое ожидание длительности поиска с момента потери контакта, за которым не последовало непосредственно восстановление контакта, до момента обнаружения объекта.

Математическая модель процесса слежения за группой объектов. Пусть в районе находится N_0 объектов и в момент времени $t=0$ начинают поиск $N_{\text{н}}$ наблюдателей ($N_{\text{н}} > N_0$).

Вероятность обнаружения первого объекта из N_0 определяется формулой $P(t, 1) = 1 - \exp(-N_{\text{н}}N_0\gamma t)$. Очевидно, что второй объект из оставшихся N_0-1 объектов будет обнаружен одним из $N_{\text{н}}-1$ наблюдателей. Поэтому $P(t, 2) = 1 - \exp[-(N_{\text{н}}-1)(N_0-1)\gamma t]$. Соответственно вероятность обнаружения $(i+1)$ -го объекта будет $P(t, i) = 1 - \exp[-(N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma t]$.

Предположим, что слежение осуществляется при постоянном преимуществе вторичного поиска перед первичным, т. е. вторичный поиск не сменяется первичным. В этом случае каждый i -й наблюдатель при обнаружении с вероятностью $P(t, i)$ каждого $(i+1)$ -го объекта начинает слежение и не участвует в поиске других объектов. Соответственно каждый $(i+1)$ -й обнаруженный объект перестает быть объектом поиска и слежения для других наблюдателей. Следовательно, вероятность слежения при данных ограничениях можно определить, используя формулу (6.3). Для этого достаточно в формуле (6.3) заменить γ на $(N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma$, т. е.

$$P_{\text{сл}}(t, i) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} -$$

$$- \frac{\lambda - (N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma}{\mu + \lambda - (N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma} \exp[-(N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma t] -$$

$$- \frac{\mu\gamma(N_{\text{н}}-i)(N_0-i)}{(\mu + \lambda)[\mu + \lambda - (N_{\text{н}}-i)(N_0-i)\gamma]} \exp[-(\mu + \lambda)t],$$

где $P_{\text{сл}}(t, i)$ — вероятность слежения за $(i+1)$ -м обнаруженным объектом, который для $(i+1) \leq N_0, N_H$.

Обозначим $Z = \min(N_H, N_0)$. Тогда математическое ожидание числа объектов $M[N_{\text{сл}}]$, за которыми осуществляется слежение, можно определить по формуле

$$M[N_{\text{сл}}] = \sum_{i=0}^{Z-1} P_{\text{сл}}(t, i).$$

Как показано в [26], предельная вероятность слежения и предельное математическое ожидание числа объектов, за которыми осуществляется слежение, определяются по формулам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{сл}}(t, i) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda};$$

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} M[N_{\text{сл}}] = \frac{Z\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{ZM[t_{\text{пк}}]}{M[t_{\text{пк}}] + M[t_{\text{вк}}]}.$$

В рассмотренных моделях процессов слежения интенсивность вторичного поиска считается постоянной. Для более адекватных моделей необходимо ослабить это ограничение, принимая плотность потока восстановлений контакта (интенсивность обнаружений при вторичном поиске) $\lambda(\tau)$ убывающей функцией времени τ , прошедшего с момента потери контакта.

Убывание интенсивности вторичного поиска можно учесть следующим образом. Будем считать, что при потере контакта кроме постоянной интенсивности первичного поиска γ возникает дополнительная интенсивность вторичного поиска $\lambda(\tau)$ — убывающая функция времени τ . Тогда общая интенсивность вторичного поиска будет равна $\Lambda(\tau) = \gamma + \lambda(\tau)$.

Очевидно, что дополнительная интенсивность $\lambda(\tau)$ стремится к нулю, а $\Lambda(\tau)$ к γ , когда τ неограниченно возрастает. Пусть

$$\lambda(\tau) = \frac{b(b+c) \exp[-(b+c)\tau]}{b \exp[-(b+c)\tau] + c},$$

где $b = \lambda(0)$ — величина дополнительной интенсивности вторичного поиска в момент потери контакта; c — начальная скорость убывания интенсивности вторичного поиска.

Тогда, как показано в [29], вероятность слежения за одиночным объектом при постоянном преимуществе вто-

ричного поиска перед первичным можно определить по формуле

$$P_{\text{сл}}(t) = A_0 + A_1 e^{-(\gamma+r_1)t} + A_2 e^{-(\gamma+r_2)t}, \quad (6.5)$$

где

$$r_{1,2} = 0,5(\mu + b + c \pm \sqrt{(\mu + b + c)^2 - 4\mu c});$$

$$A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{сл}}(t) = \frac{\gamma(\gamma + b + c)}{\gamma(\gamma + b + c) + \mu(\gamma + c)};$$

$$A_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} (b + c - r_1) \left[\frac{\gamma}{\gamma + r_1} - P_{\text{сл}}(0) \right];$$

$$A_2 = P_{\text{сл}}(0) - A_0 - A_1.$$

От (6.5) можно перейти к вероятности слежения $P_{\text{сл}}^*(t)$ за одиночным объектом при кратковременном преимуществе вторичного поиска перед первичным.

Пусть на основании формулы (6.4)

$$P_{\text{сл}}^*(t) = \frac{\gamma}{\mu(1 - P_{\text{вк}}^*) + \gamma} [1 - \exp\{-[\gamma + \mu(1 - P_{\text{вк}}^*)]t\}],$$

где $P_{\text{вк}}^*$ — вероятность восстановления контакта с учетом убывания интенсивности вторичного поиска. Для определения $P_{\text{вк}}^*$ можно, например, как сделано в [26], взять за основу при $P_{\text{сл}}(0) = 0$ равенство вероятностей слежения в установившемся режиме, т. е.

$$P_{\text{сл}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{сл}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\text{сл}}^*(t)$$

или

$$P_{\text{сл}} = \gamma / [\gamma + \mu(1 - P_{\text{вк}}^*)]. \quad (6.6)$$

Из (6.6) имеем

$$P_{\text{вк}}^* = b / (\gamma + b + c). \quad (6.7)$$

Следовательно, вероятность слежения за одиночным объектом в установившемся режиме при кратковременном преимуществе вторичного поиска перед первичным будет равна $P = A_0$, чему соответствует вероятность непосредственного восстановления контакта $P_{\text{вк}}^*$, определяемая по формуле (6.7).

Модель процесса слежения за группой объектов, в которой учитывается убывание со временем интенсивности восстановления контакта, как это описано в [26], можно построить на основании следующего.

Пусть объекты входят в район поиска с интенсивностью (плотность потока) $\xi(t)$ (рис. 6.1). При входе в район цель с вероятностью g обнаруживается средствами наблюдения на рубеже, по данным которых осуществляется наведение специальных маневренных сил (состояние 1). При обнаружении объекта по данным наведения за ним начинается слежение (состояние 2). Интенсивность обнаружений по данным наведения

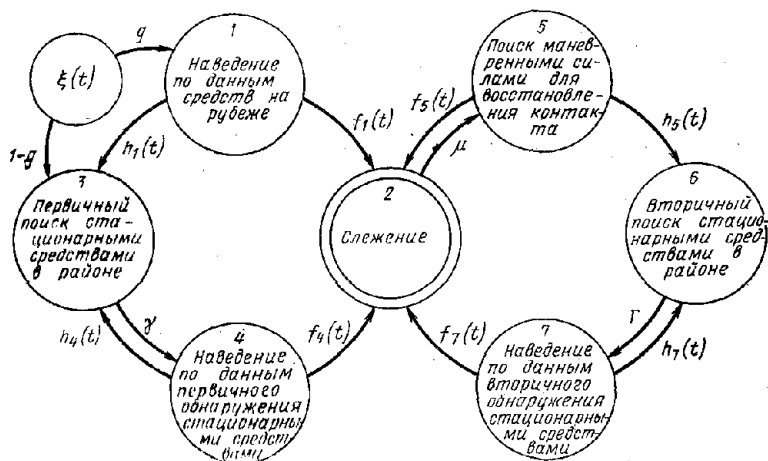


Рис. 6.1. Модель процесса слежения за группой объектов.

средств обнаружения на рубеже принимается равной $f_1(t)$. Если же объект не обнаружен, то он становится объектом первичного поиска стационарных средств обнаружения в районе (состояние 3). В таком же состоянии окажется объект, который не был обнаружен на рубеже с вероятностью $1-g$. Переходу в состояние 3 соответствует интенсивность $h_1(t)$ — прекращение попыток установления контакта по данным средств обнаружения на рубеже.

При первичном обнаружении объекта стационарными средствами в районе осуществляется наведение маневренных сил (состояние 4). Интенсивность первичного поиска стационарными средствами обозначена на рис. 6.1 через γ . Если же объект обнаружен, за ним начинается слежение (состояние 2), а в противном случае — поиск стационарными средствами в районе (со-

стояние 3). Переход из состояния 4 в состояние 2 соответствует интенсивности $f_4(t)$, а возвращение в состояние 3 — интенсивности $h_4(t)$.

При потере контакта маневренные силы начинают специальный поиск в районе (состояние 5). Интенсивность потерь контактов маневренными силами принимается равной μ . Если маневренные силы обнаруживают объект, то с интенсивностью $f_5(t)$ наступает состояние 2. В противном случае объект может быть обнаружен при вторичном поиске стационарными средствами (состояние 6). Этому исходу соответствует интенсивность $h_5(t)$. По данным вторичного обнаружения с интенсивностью Γ осуществляется наведение маневренных сил (состояние Е). В зависимости от успешности или неуспешности его завершения наступает состояние 2 или 6 соответственно. Вероятности переходов в состояния 2 и 6 принимаются соответственно равными $f_7(t)$ и $h_7(t)$.

Показателем эффективности описанного процесса является математическое ожидание числа объектов $n_i(t)$, находящихся в момент времени t в i -м состоянии. Например, математическое ожидание числа объектов, на которые осуществляется наведение маневренных сил (объекты в состоянии 1) или за которыми осуществляется слежение (объекты в состоянии 2) и т. д. Для определения этого показателя принимается, что время пребывания объекта в районе является случайной величиной, подчиненной заданному закону распределения и не зависящей от слежения за ней. Кроме того, делается допущение о неограниченном числе единиц маневренных сил, предназначенных для слежения.

Пусть к моменту времени t длительность пребывания объекта в районе оказалась равной u . Следовательно, момент входа объекта в район равен $t-u$. Математическое ожидание числа объектов, вошедших в район в промежутке времени от $t-(u+du)$ до $t-u$, равно $\xi(t-u)du$. Обозначим через $\bar{R}(t)=1-R(t)$ вероятность того, что длительность пребывания объекта в районе, отсчитываемая от начала времени его нахождения в районе, превосходит t . Тогда математическое ожидание числа объектов, вошедших в район в интервале $[t-u-du, t-u]$ и оставшихся там к моменту времени t , равно $\bar{R}u\xi(t-u)du$.

Обозначим через $x_i(u)$ вероятность того, что объект находится через время u после вхождения в район в со-

стоянии i , если он был обнаружен на рубеже и продолжал в течение u оставаться в районе. Соответственно через $y_i(u)$ обозначим ту же вероятность, но при условии необнаружения объекта на рубеже. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^7 x_i(u) = 1 \text{ и } \sum_{i=1}^7 y_i(u) = 1.$$

Обозначим, кроме того, через $z_i(u, t)$ вероятность того, что объект в момент времени t будет в состоянии i , если он находится в районе в течение времени u . Вероятность $z_i(u, t)$ зависит от принадлежности момента входа объекта в район $(t-u)$ интервалу $0 \leq t-u \leq t$ или интервалу $-\infty \leq t-u < 0$. Это определяется отсчетом времени t от момента начала функционирования сил в районе. Поэтому отрицательным t соответствует пребывание объекта в районе до начала действия сил.

Таким образом,

$$z_i(u, t) = \begin{cases} gx_i(t) + (1-g)y_i(u) & \text{при } 0 \leq u \leq t, \\ y_i(t) & \text{при } t < u \leq \infty, \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^7 z_i(u, t) = 1.$$

Тогда к моменту t в состоянии i будет находиться $z_i(u, t) \bar{R}(u) \xi(t-u) du$ объектов из числа вошедших в район за промежуток времени от $t-(u+du)$ до $t-u$. Отсюда

$$\begin{aligned} n_i(t) &= \int_0^{\infty} z_i(u, t) \bar{R}(u) \xi(t-u) du = \\ &= \int_0^t [gx_i(u) + (1-g)y_i(u)] \bar{R}(u) \xi(t-u) du + \\ &\quad + y_i(t) \int_0^{\infty} \bar{R}(u) \xi(t-u) du. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Общее математическое ожидание числа объектов, находящихся в районе к моменту времени t , будет

$$N(t) = \sum_{i=1}^7 n_i(t) = \int_0^{\infty} \bar{R}(u) \xi(t-u) du.$$

Величину $x_i(t)$ можно найти, решив следующую систему интегральных уравнений [26]:

$$\sum_{i=1}^7 x_i(t) = 1,$$

$$x_1(t) = Q_1(t),$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \int_0^t x_4(u) e^{-\gamma(t-u)} h_4(u) du + \\ & + \int_0^t x_1(u) e^{-\gamma(t-u)} h_1(u) du, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$x_4(t) = \int_0^t x_2(u) Q_4(t-u) \gamma du,$$

$$x_5(t) = \int_0^t x_2(u) Q_5(t-u) \Gamma du,$$

$$\begin{aligned} x_6(t) = & \int_0^t x_5(u) e^{-\Gamma(t-u)} h_5(u) du + \\ & + \int_0^t x_7(u) e^{-\Gamma(t-u)} h_7(u) du, \end{aligned}$$

$$x_7 = \int_0^t x_5(u) Q_7(t-u) \Gamma du,$$

где

$$Q_i(\tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau [f_i(u) + h_i(u)] du \right\}$$

— вероятность того, что объект, находящийся при $\tau=0$ в состоянии i ($i=1, 4, 5, 7$), сохранит свое состояние к моменту времени τ .

Величину $y_i(t)$ можно найти, решив аналогичную систему, уравнения которой, кроме второго и третьего, совпадают с соответствующими уравнениями выписанной выше системы, если в них заменить x на y . Второе и

третье уравнения имеют следующий вид:

$$y_1(t) = 0, \quad (6.11)$$

$$y_2(t) = e^{-\gamma t} + \int_0^t y_2(u) e^{-\gamma(t-u)} h_2(u) du.$$

В общем случае решение этих систем возможно лишь численными методами.

6.2. СПОСОБЫ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ОБНАРУЖЕННЫМ ОБЪЕКТОМ

Маневрирование наблюдателя при поддержании контакта. Способами слежения являются приемы маневрирования наблюдателя при поддержании и восстановления контакта. Для возможности длительного и непрерывного поддержания контакта наблюдатель должен лечь на курс, параллельный курсу объекта, и обеспечить скорость хода, равную его скорости. В дальнейшем с изменением элементов движения объекта наблюдатель меняет курс и скорость хода.

С приемлемой точностью можно полагать, что математическое ожидание времени наблюдения $M(t_n)$ будет равно заданному при следующем условии:

$$\frac{D_{обсл} - (D_{сл} + \Delta D)}{V_{омах} - V_{нсл}} > t_{зап}, \quad (6.12)$$

где $V_{омах}$ — максимальная скорость объекта; $D_{обсл}$ — дальность действия средств обнаружения наблюдателя, осуществляющего наблюдение на скорости $V_{нсл}$; $D_{сл}$ — дистанция наблюдения при слежении; ΔD — предельная ошибка в определении дистанции до объекта; t_3 — время определения элементов движения объекта (время запаздывания).

Если условие (6.12) не соблюдается, то математическое ожидание времени наблюдения можно определить через среднюю длину $M[l]$ параллельных хорд окружности радиуса $D_{обсл}$:

$$M[t_n] = M[l] / (V_{омах} - V_{нсл}). \quad (6.13)$$

Окончательно с учетом формулы (5.60) получим

$$M[t_n] = \pi D_{обсл} / 2 (V_{омах} - V_{нсл}). \quad (6.14)$$

Таким образом, формула для определения математического ожидания времени наблюдения примет следующий вид:

$$M[t_n] = \begin{cases} \frac{\pi D_{н сл}}{2(V_{о макс} - V_{н сл})}, & \text{если } \frac{D_{об сл} - (D_{сл} + \Delta t)}{V_{о макс} - V_{н сл}} < t_{зад}, \\ t_{зад}, & \text{если } \frac{D_{об сл} - (D_{сл} + \Delta t)}{V_{о макс} - V_{н сл}} \geq t_{зад}, \end{cases} \quad (6.15)$$

где $t_{зад}$ — заданное время наблюдения.

Маневрирование наблюдателя для восстановления контакта. Маневрирование наблюдателя для восстановления контакта может осуществляться с учетом движения объекта из точки потери контакта любым или наперед заданным курсом. В первом случае маневрирование для восстановления контакта будем называть «маневрированием в настоящее место объекта», а во втором — «маневрированием в упрежденное место объекта».

Для восстановления контакта маневрированием в настоящее место объекта наблюдатель совершает переход на полной скорости V_n в точку потери контакта, в которой обследуется среда со скоростью хода, обеспечивающей максимальную дальность действия средств обнаружения.

Время, необходимое для восстановления контакта маневрированием в настоящее место объекта, можно определить по формуле

$$t'_{вк} = (D_{пк}/V_n) + t_{обс}, \quad (6.16)$$

где $D_{пк}$ — дистанция до объекта в момент потери контакта; $t_{обс}$ — время обследования среды в точке потери контакта.

Вероятность восстановления контакта маневрированием в настоящее место цели можно определить на основании следующего. Место объекта в момент потери контакта известно с определенной ошибкой, приближенно подчиняющейся нормальному круговому закону на плоскости. Распределение вероятных мест объекта по истечении времени $t'_{вк}$ после потери контакта, если предполагаемая скорость объекта равна V_0 , а все его курсы от 0 до 2π равновероятны, выражается формулой (4.58). Соответственно этому распределению вероятность того, что по истечении промежутка времени $t'_{вк}$ объект будет в пределах дальности $D_{об}$ действия средств наблюдате-

ля, находящегося в точке потери контакта, определяется с помощью рис. 4.9. Это и будет вероятность $P'_{\text{вк}}(t'_{\text{вк}})$ восстановления контакта маневрированием в настоящее место объекта.

Покажем определение $P'_{\text{вк}}(t'_{\text{вк}})$ на следующем примере.

Пусть время восстановления контакта $t'_{\text{вк}}=1$ ч, дальность обнаружения объекта $D_{\text{об}}=10$ миль, скорость объекта $V_0=8$ узл и радиус среднего квадратичного круга определения места объекта в момент потери контакта $\sigma=4$ мили. Находим

$$V_0 t'_{\text{вк}}/\sigma = 2; \quad (D_{\text{об}} - V_0 t'_{\text{вк}})/\sigma = 0,5.$$

На рис. 4.9 по значению $(D_{\text{об}} - V_0 t'_{\text{вк}})/\sigma = 0,5$ для кривой, соответствующей отношению $V_0 t'_{\text{вк}}/\sigma = 2$, находим, что вероятность восстановления контакта маневрированием в настоящее место объекта равна 0,6 (60%).

Если $D_{\text{об}}$ зависит от V_0 , необходимо определить $P'_{\text{вк}}$ для различных значений V_0 и выбрать из них минимальное.

Таблица 6.1

Матрица эффективности

Игрок I (наблюдатель) и его стратегия	Игрок II (объект) и его стратегии		
	B_1	B_2	B_3
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

При восстановлении контакта маневрированием в упрежденное место объекта целесообразно принять во внимание следующие действия объекта после потери контакта: 1) объект изменил курс влево (действие B_1); 2) объект не изменил курса (действие B_2); 3) объект изменил курс вправо (действие B_3).

Соответственно наблюдатель для восстановления контакта может совершить переход в упрежденную точку на прежнем курсе объекта (действие A_1), с учетом движения объекта влево (действие A_2) или с учетом движения объекта вправо (действие A_3). Пусть результат взаимных действий (A_i, B_j) характеризуется критерием эффективности a_{ij} , представляющим собой выигрыш наблюдателя, т. е. вероятность восстановления контакта в упрежденное место объекта на j -м курсе и i -м курсе наблюдателя. Тогда ситуацию восстановления контакта можно представить в виде некоторой матрицы эффективности (табл. 6.1).

В условиях скрытного слежения потеря контакта может произойти как из-за обнаружения объектом наблюдателя и изменения своего движения, так и из-за изменения дальности обнаружения объекта (например, из-за изменения условий наблюдения). Поэтому в данном случае восстановление контакта является сложным событием, представляющим сумму двух событий: «восстановление контакта в случае необнаружения объектом наблюдателя» и «восстановление контакта в случае обнаружения наблюдателя». Поскольку эти события несовместимы, вероятность восстановления контакта в условиях скрытного слежения будет

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, \quad (6.17)$$

где a'_{ij} — вероятность восстановления контакта при необнаружении наблюдателя; a''_{ij} — вероятность восстановления контакта при обнаружении наблюдателя.

Вероятность восстановления контакта при необнаружении наблюдателя представляет собой вероятность сложного события, являющегося произведением двух независимых событий: «необнаружение наблюдателя при переходе в точку потери контакта» и «обнаружение неуклоняющегося объекта». Поэтому

$$a'_{ij} = (1 - P) Q_i, \quad (6.18)$$

где P — вероятность обнаружения наблюдателя при переходе в точку потери контакта; Q_i — вероятность обнаружения неуклоняющегося объекта при i -м действии наблюдателя.

Аналогично вероятность восстановления контакта при обнаружении наблюдателя будет

$$a''_{ij} = P Q_{ij}, \quad (6.19)$$

где Q_{ij} — вероятность обнаружения уклоняющегося объекта способом j при i -м действии наблюдателя.

Подставив выражения (6.18) и (6.19) в формулу (6.17), получим

$$a_{ij} = (1 - P) Q_i + P Q_{ij}. \quad (6.20)$$

Естественно принять, что если упрежденная точка выбрана на фактическом курсе объекта, то вероятность обнаружения равна единице, а если на противоположном — нулю. Для всех остальных случаев (A_2 и B_1 или

B_3 , B_2 и A_1 или A_3) вероятность обнаружения примем равной q . На основании этого допущения по формуле (6.20) вычислим в общем виде значения a_{ij} . Например, $a_{11} = (1-P)q + P$.

Действительно, при необнаружении наблюдателя объектом (вероятность этого равна $1-P$) последний свой курс не изменит (действие B_2). Поэтому для способа восстановления контакта A_1 вероятность обнаружения объекта будет равна q . При обнаружении наблюдателя объектом (вероятность этого P) последний начнет маневр уклонения (действие B_1). Поэтому для восстановления контакта (действие A_1) вероятность обнаружения будет равна единице.

Таблица 6.2

Математическая модель ситуации

Наблюдатель	Объект		
	B_1	B_2	B_3
A_1	$(1-P)q + P$	q	$(1-P)q$
A_2	$(1-P) + Pq$	1	$1-P + Pq$
A_3	$(1-P)q$	q	$(1-P)q + P$

В результате получим табл. 6.2, которая является математической моделью ситуации, складывающейся при потере контакта в процессе скрытного слежения.

Для выбора оптимального способа восстановления контакта в этих условиях необходимо задаться гипотезой о действиях объекта или законом распределения их вероятностей. Однако при рассматриваемой ситуации отдать предпочтение какой-либо гипотезе не представляется возможным, а методов определения законов распределения вероятности выбора объектом своих способов действий просто не существует.

Для принятия оптимальных решений в условиях неопределенности прибегнем к методам теории игр. Теоретико-игровая модель ситуации восстановления контакта принадлежит к классу одноходовых конечных антагонистических игр (матричных игр). Функция выигрыша в такой игре задается матрицей (табл. 6.2), в которой строки отводятся для стратегий максимизирующего игрока (игрок I), а столбцы — для стратегий минимизирующего игрока (игрок II).

Для определения способа восстановления контакта по принципу оптимальности теории игр (§ 1.5) необходимо проверить матрицу на наличие седловой точки.

Найдем $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ и $\beta_j = \max_i a_{ij}$, т. е. минимальные и максимальные значения a_{ij} при всех возможных i и j . Записав эти значения в виде дополнительной строки и дополнительного столбца в табл. 6.2, получим табл. 6.3.

Таблица 6.3

Игровая модель ситуации

Наблюдатель	Объект				
	B_1	B_2	B_3	α_i	β_j
A_1	$(1-P)q+P$	q	$(1-P)q$	$(1-P)q$	$1-P+Pq$
A_2	$1-P+Pq$	1	$1-P+Pq$	$1-P+Pq$	
A_3	$(1-P)q$	q	$(1-P)q+P$	$(1-P)q$	
$\beta_j^{(1)}$	$1-P+Pq$	1	$1-P+Pq$		
$(0 \leq P \leq 0,5)$					
$\beta_j^{(2)}$	$(1-P)q+P$	1	$(1-P)q+P$		
$(0,5 < P \leq 1)$					
$\beta_j^{(1)}$	$1-P+Pq$		$1-P+P$		
$\beta_j^{(2)}$	$(1-P)q+P$		$(1-P)q+P$		

Найдем максимальное значение α_i :

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 1 - P + Pq$$

и минимальное значение $\beta_j^{(1)}$ и $\beta_j^{(2)}$:

$$\beta_j^{(1)} = \min_j \max_i a_{ij} = 1 - P + Pq,$$

$$\beta_j^{(2)} = \min_j \max_i a_{ij} = (1 - P)q + P.$$

Следовательно, матрица имеет седловую точку при $0 \leq P \leq 0,5$, так как $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$.

При $0,5 < P \leq 1$ матрица седловой точки не имеет и решение игры лежит в области смешанных стратегий, которые найдем, используя общий метод решения матричных игр [2]. В результате получим все решения игры и сведем их в табл. 6.4.

Решения игры

Параметры

P	q	Оптимальные стратегии								Значение игры V
		Игрок I (наблюдатель)				Игрок II (цель)				
				x_3	x_4	y_1	y_2	y_3		
		x_1	x_2							
$0 \leq P \leq 0,5$	$0 \leq q \leq 1$	0	1	0	0	1 0	0 1	0 1	$1-P+Pq$	
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(1-P)q + \frac{P}{2}$	
$0,5 < P \leq 1$ $0,5 \leq P \leq \frac{2(1-q)}{3-4q}$	$0,5 \leq q \leq 1$ $0 \leq q \leq 0,5$	$\frac{1-q}{3-4q}$	$\frac{1-2q}{3-4q}$	$\frac{1-q}{3-4q}$	$\frac{2(1-q)}{1-P(3-4q)}$	$\frac{1-q}{P(3-4q)}$	$\frac{1-q}{P(3-4q)}$	$\frac{1-2q^2}{3-4q}$		
		$\frac{2(1-q)}{3-4q} < P \leq 1$								

Из этой таблицы в зависимости от вероятности P обнаружения наблюдателя объектом и вероятности q обнаружения объекта наблюдателем выбирается способ восстановления контакта. Например, если вероятность обнаружения наблюдателя объектом не превышает 0,5, то независимо от величины q следует маневрировать в упрежденную точку по курсу объекта, которым он следовал до момента потери контакта. Если же вероятности P и q более 0,5, то целесообразно маневрировать в упрежденное место объекта с равновероятным учетом движения его вправо или влево.

Вероятность P обнаружения наблюдателя объектом можно определить как вероятность того, что дистанция скрытного слежения $D_{\text{сл}}$ будет не более дальности действия средств обнаружения объекта $D_{\text{об}}$, т. е.

$$P = P_{\{D_{\text{сл}} < D_{\text{об}}\}} = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{D_{\text{сл}} - D_{\text{об}}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right], \quad (6.21)$$

где σ_1 — среднеквадратическая ошибка определения дальности действия средств обнаружения объекта; σ_2 — среднеквадратическая ошибка определения и удержания дистанции скрытного слежения.

Вероятность q обнаружения объекта наблюдателем после перехода в упрежденное место можно представить как вероятность попадания в круг, центр которого смещен относительно центра кругового рассеивания (рис. 6.2). В этом случае формула для расчета этой вероятности имеет следующий вид [1]:

$$q = e^{-h^2/2} \int_0^r e^{-t^2/2} I_0(ht) dt, \quad (6.22)$$

где

$$h = d_0/\sigma; \quad r = D_{\text{об}}/\sigma; \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2};$$

d_0 — расстояние от центра рассеивания до центра круга; $D_{\text{об}}$ — дальность обнаружения цели; I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка мнимого аргумента.

Интеграл (6.22) вычисляется с помощью численных методов и его значения приведены в таблицах [1] по аргументам h и r . Расстояние d_0 определяется из геометрии рис. 6.2 по формуле

$$d_0 = \sqrt{(t_{\text{вк}} V_0)^2 + (t_{\text{вк}} V_{\text{н}} - D_{\text{вк}})^2},$$

где $t_{\text{вк}}$ — время маневрирования для восстановления контакта; $D_{\text{пк}}$ — дистанция до цели в момент потери контакта.

Вероятность восстановления контакта способом маневрирования в упрежденное место объекта при скрытном слежении равна значению игры V (табл. 6.4).

Теоретико-игровую модель восстановления контакта в процессе нескрытного слежения легко получить из табл. 6.2, принимая $P=1$ (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Теоретико-игровая модель восстановления контакта

Наблюдатель	Объект		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	0
A_2	q	1	q
A_3	0	q	1

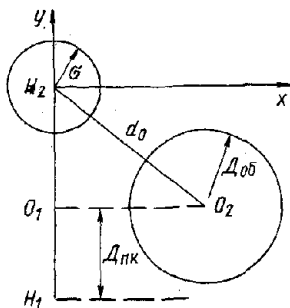


Рис. 6.2. К расчету вероятности восстановления контакта с объектом при слежении.

В результате решения полученной игры оказывается, что при $0,5 \leq q \leq 1$ целесообразно для восстановления контакта маневрировать в упрежденную точку курсом объекта, которым он следовал до потери контакта. Если же $0 \leq q < 0,5$, то с вероятностью $(1-q)/(3-4q)$ целесообразно маневрировать в упрежденную точку на курс объекта, отличающимся от его курса в момент потери контакта на 90° влево или вправо, а с вероятностью $(1-2q)/(3-4q)$ — в упрежденную точку на курс объекта, которым он следовал до момента потери контакта. Вероятность восстановления контакта (значение игры) в этом случае равна q при $0,5 \leq q \leq 1$ или $(1-2q^2)/(3-4q)$ при $0 \leq q < 0,5$.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОИСКОВЫХ РЕСУРСОВ

7.1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОИСКОВЫХ РЕСУРСОВ

Общее положение. Организация поиска всегда связана с распределением поисковых ресурсов по районам нахождения или возможного нахождения объектов поиска. При этом под поисковыми ресурсами понимаются наблюдатели со всеми их качествами, в первую очередь с определенными средствами обнаружения, маневренными возможностями и т. п. Обычно имеющихся в наличии поисковых ресурсов, как правило, не хватает для выполнения поиска в каждом районе наиболее эффективным образом. В этом случае необходимо определить такое распределение поисковых ресурсов по районам, при котором либо максимизируется получаемый в результате суммарный эффект, либо минимизируются общие затраты, связанные с выполнением поиска. Для точного описания подобных задач их необходимо сформулировать математически. Для этого все существенные переменные, подвергнутые ограничениям, и функция, подлежащая оптимизации, сводятся в математическую модель распределения поисковых ресурсов.

В самом общем виде математическую модель поисковых ресурсов можно представить в виде

$$\omega = f(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n);$$

$$q_k(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0; \quad k = 1, \dots, p,$$

где ω — критерий эффективности поисковых действий; $x_i, i = 1, \dots, m$, — управляемые переменные; $y_j, j = 1, \dots, n$, — неуправляемые переменные или случайные воздействия; $q_k, k = 1, \dots, p$, — функции, выражающие ограничения.

Обычно речь идет о нахождении экстремального значения критерия эффективности при соблюдении данных ограничений.

Большинство моделей распределения поисковых ресурсов можно представить в виде матриц (табл. 7.1).

Элементы ω_i (в клетках матрицы) соответствуют

Модель распределения поисковых ресурсов

Тип наблюдателя	Номер района поиска						Объем имеющихся поисковых ресурсов
	1	2	...	j	...	n	
1	w_{11}	w_{12}	...	w_{1j}	...	w_{1n}	b_1
2	w_{21}	w_{22}	...	w_{2j}	...	w_{2n}	b_2
.	.	.	...	.	...	.	.
.	.	.	...	.	...	.	.
i	w_{i1}	w_{i2}	...	w_{ij}	...	w_{in}	b_i
.	.	.	...	.	...	.	.
.	.	.	...	.	...	.	.
m	w_{m1}	w_{m2}	...	w_{mj}	...	w_{mn}	b_m
Объем требуемых ресурсов	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n	

значению критерия эффективности, соответствующему выделению одного наблюдателя i -го типа в j -й район поиска. Величины w_{ij} могут быть независимыми или зависимыми. Например, вероятность обнаружения объекта одним наблюдателем i -го типа в некотором районе поиска не зависит от качества наблюдателей в других районах. В то же время при назначении нескольких наблюдателей в один и тот же район вероятность обнаружения цели одним из них обычно зависит от поисковых производительностей других. Ниже рассмотрены преимущественно модели распределения с независимыми эффектами и затратами, т. е. будем предполагать, что наблюдатели осуществляют поиск независимо друг от друга. Это объясняется не актуальностью проблемы, а простотой построения моделей и решения поисковых задач.

После построения модели нужно определить значения управляемых переменных, максимизирующие или минимизирующие результат поисковых действий для решения поставленных задач. Выбор метода решения зависит от вида модели. Существуют три метода нахождения решения: аналитический, численный и метод статистических испытаний.

Аналитический метод основан на использовании различных разделов математического анализа. Решения в этих случаях получаются непосредственно в общем виде, после чего вместо символов ставятся подставные

числа. Численные методы применяются при сложности аналитических или при их отсутствии.

Метод статистических испытаний основан на случайном выборе значений переменных в соответствии со своими законами и последующей статистической обработкой полученных результатов многократной реализацией модели. Этот метод представляет собой моделирование эксперимента распределения поисковых ресурсов для определения вероятностных свойств того или иного способа распределения.

Классификация математических моделей распределения поисковых ресурсов. Математические методы распределения поисковых ресурсов можно классифицировать по следующим признакам: виду наблюдателей; числу районов, выделенных для поиска; числу сторон, принимающих решения; виду критерия эффективности и наложенных ограничений; времени поиска как постоянного или переменного параметра.

По виду наблюдателей будем различать распределение однородных ресурсов, т. е. имеющих в равных условиях одинаковую поисковую производительность, и неоднородных ресурсов, соответствующих нескольким группам однородных наблюдателей, отличающихся друг от друга поисковыми производительностями. Необходимость в подобном разделении связана с существенным усложнением математической модели распределения при переходе от однородных к неоднородным ресурсам.

По числу районов, выделенных для поиска, различают два класса моделей, связанных с распределением поисковых ресурсов в одном или более районах соответственно.

Первый класс математических моделей достаточно полно рассмотрен в гл. 5. Теперь рассмотрим распределение $m \geq 1$ наблюдателей по $n \geq 2$ районам.

Пусть известно, что в j -м ($j=1, \dots, n$) районе достоверно находится объект поиска. Для принятых условий i -й ($i=1, \dots, m$) наблюдатель может быть направлен для поиска j -го ($j=1, \dots, n$) объекта. В этом случае распределение наблюдателей будет детерминированным.

Обозначим через γ_{ij} вероятность того, что i -й наблюдатель выполняет поиск j -го объекта. Очевидно, что при детерминированном распределении эта вероятность может быть равна либо единице, если i -й наблюдатель назначен в j -й район, либо нулю — в противном случае.

Если же район нахождения объекта неизвестен, распределение наблюдателей будет случайным. При случайном распределении наблюдателей i -й наблюдатель может, вообще говоря, с известной вероятностью выполнять поиск любого объекта. Тогда γ_{ij} принимает значения, отличные от нуля и единицы.

Модель детерминированного распределения поисковых ресурсов идентична ситуации поиска однородных объектов, статистически равномерно распределенных по всем районам. Переход от детерминированного к случайному распределению обусловлен двумя причинами. К первой из них следует отнести разные вероятности нахождения объектов в любом из районов из-за неравномерного распределения их по районам, связанного с географическими или биологическими условиями.

Другой причиной перехода к случайному распределению поисковых ресурсов является организация поиска неоднородных объектов, характеризующихся коэффициентами важности (опасности) γ_j .

В общем случае при n районов и m наблюдателей имеем nm различных вероятностей γ_{ij} . Эти вероятности можно свести в прямоугольную таблицу, называемую матрицей распределения [29]:

$$\| \gamma_{ij} \| = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2j} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{mj} & \dots & \gamma_{mn} \end{vmatrix}.$$

Каждая строка состоит из вероятностей выполнения поиска каждого из объектов одним из наблюдателей. Поэтому сумма элементов i -й строки равна вероятности η_i того, что i -й наблюдатель будет осуществлять поиск одного (любого) объекта, т. е.

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

В свою очередь, каждый столбец состоит из вероятностей выполнения поиска каждым наблюдателем соответствующего объекта. Поэтому сумма элементов j -го столбца будет равна математическому ожиданию числа наблюдателей M_j , осуществляющих поиск j -й цели;

$$M_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Сумма всех элементов матрицы распределения равна математическому ожиданию числа наблюдателей η_n , осуществляющих поиск какого-либо объекта;

$$\eta_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n \gamma_{ij} = \sum_{i=1}^m \eta_i = \sum_{j=1}^n M_j.$$

Очевидно, что для $j = 1, 2, \dots, n$

$$\eta_n \begin{cases} = m, & \text{если } \eta_j = 1, \\ < m, & \text{если } \eta_j < 1. \end{cases}$$

Обозначим вероятность обнаружения i -м наблюдателем j -й цели через p_{ij} . Тогда при независимом действии всех наблюдателей вероятность обнаружения j -го объекта w_j хотя бы одним наблюдателем можно определить по формуле

$$w_j = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij} \gamma_{ij}),$$

а математическое ожидание числа обнаруженных объектов — по формуле

$$M = \sum_{j=1}^n \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij} \gamma_{ij}) \right].$$

Таким образом, оптимальное распределение поисковых ресурсов состоит в таком задании матрицы $\|\gamma_{ij}\|$, при котором максимизируется M . Однако определение γ_{ij} встречает серьезные трудности, обусловленные большим числом возможных вариантов, неопределенностью и неполнотой информации об объектах, а также их противодействием обнаружению. Эти ограничения требуют построения математических моделей распределения поисковых ресурсов прежде всего в зависимости от числа сторон, принимающих решения. В результате такого деления математические модели могут быть описательными и нормативными. Типичным примером описательных моделей являются модели, рассмотренные в гл. 5. В данной главе рассмотрены нормативные модели, как экстремальные, так и теоретико-игровые.

В зависимости от вида критерия эффективности и наложенных ограничений математические модели распределения поисковых ресурсов можно разделить на линейные и нелинейные.

Если эффект или затраты, определяемые объемом поискового ресурса i (см. табл. 7.1), выделенного для поиска в районе j , равны $x_{ij}w_{ij}$, то имеем линейную модель. Допущение о линейной зависимости критерия эффективности и наложенных ограничений от переменных модели позволяет использовать хорошо разработанный аппарат линейного программирования. Однако в большинстве случаев оказывается необходимым принять нелинейную зависимость критерия эффективности и соответственно построить нелинейную модель.

В зависимости от наличия или отсутствия ограничений, наложенных на значения переменных модели, можно выделить модели без ограничений и модели с ограничениями. Примером более простой модели без ограничений служит формула длины участка при поиске на рубеже (5.23). Здесь критерий эффективности (длина участка) представляет дифференцируемую функцию одной переменной (угол α) и поэтому ее экстремум получен из условия равенства нулю первой производной, а вторая производная показала, что полученный экстремум является максимумом.

При соответствии критерия эффективности дифференцируемой функции многих переменных максимум или минимум этого критерия получают аналогично. Однако такой подход возможен только в простейших случаях. Как правило, он очень сложен и легче непосредственно «нащупать» максимум, чем решать сложную систему уравнений. Следовательно, отсутствие ограничений не всегда определяет оптимальное распределение поисковых ресурсов с помощью классических методов анализа. В этом случае бывает целесообразно использовать динамическое программирование с заменой определения максимума функции многих переменных многократным определением максимума функции одного переменного.

Введение ограничений существенно увеличивает сложность модели распределения поисковых ресурсов. В этих случаях, даже если критерий эффективности представляет дифференцируемую функцию, максимум не может быть определен с помощью классических методов математического анализа, если он не лежит внутри области, определенной совокупностью ограничений. В тех случаях, когда критерий эффективности вообще нельзя дифференцировать или число переменных велико, найти оптимальное распределение поисковых ресурсов

можно только с помощью методов математического программирования.

В зависимости от влияния распределения поисковых ресурсов для одного периода времени на распределение ресурсов для последующих периодов математические методы распределения поисковых ресурсов делятся на статические и динамические.

Модель, в которой время не является переменной, называют статической. В динамической же модели одной из переменных является время. С этой точки зрения ниже рассмотрены только статические модели распределения поисковых ресурсов. Однако различие между статическими и динамическими моделями может быть условным. В последнем случае основное назначение динамической модели состоит в использовании разработанных методов динамического программирования, заменяющих непосредственное отыскание экстремума критерия эффективности многих управляемых переменных отысканием экстремума функции одного переменного (или гораздо меньшего, чем исходное число переменных).

Наконец, математические модели распределения поисковых ресурсов можно классифицировать с учетом применяемых методов, т. е. модель можно отнести к теории игр, к линейному или динамическому программированию и т. д. При этом модель может иметь ряд отличительных черт, связанных с типами предыдущих классификаций, некоторые из них будут доминировать. Так, для теории игр характерно наличие двух сторон (наблюдатель и объект поиска), для линейного программирования — линейная зависимость критерия эффективности от большого числа переменных и наличие линейных ограничений, для динамического программирования — многошаговость принятия решений по распределению поисковых ресурсов и т. д.

В данной главе основное внимание обращено на непосредственное построение моделей и алгоритмы получения оптимальных планов распределения поисковых ресурсов.

7.2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОИСКОВЫХ РЕСУРСОВ

Поиск при равномерном распределении объектов по районам поиска. Предположим, имеется m наблюдате-

лей, каждый из которых должен осуществлять поиск в одном из n районов, по которым равномерно распределен объект поиска, а вероятность обнаружения объекта i -м наблюдателем в районе равна p_{ij} . Вероятность p_{ij} в случае распределения однородных наблюдателей при прочих равных условиях определяется размерами района и его свойствами, влияющими на дальность действия средств поиска наблюдателей. Если же распределяются неоднородные наблюдатели, то вероятность, кроме того, будет зависеть и от поисковой производительности i -го наблюдателя. Требуется найти оптимальное распределение наблюдателей по районам, при котором математическое ожидание числа обнаруженных объектов будет максимальным.

Обозначим через x_{ij} вероятность назначения i -го наблюдателя для выполнения поиска в j -м районе. Тогда

$$M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} p_{ij}.$$

Следовательно, требуется найти такую матрицу распределения поисковых ресурсов $x = \|x_{ij}\|$, при которой M достигнет максимального значения. При этом должны выполняться следующие условия:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й наблюдатель не направляется} \\ & \text{в } j\text{-й район,} \\ 1, & \text{если } i\text{-й наблюдатель направляется} \\ & \text{в } j\text{-й район;} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \begin{cases} 1, & j = 1, \dots, n. \\ 0, & \end{cases} \quad (7.3)$$

Условие (7.1) является признаком детерминированного распределения, а условия (7.2) и (7.3) отражают допущение, что в одном районе выполняет поиск только один наблюдатель, т. е. $m \leq n$.

Предположим, что $m = n$. В этом случае план оптимального распределения можно найти, выбрав по одному элементу (всего n элементов) из каждой строки и каждого столбца матрицы $P = \|p_{ij}\|$ таким образом, чтобы

сумма их оказалась наибольшей. Формально это означает выбор такой последовательности элементов

$\{p_{1j_1}, p_{2j_2}, \dots, p_{nj_n}\}$ из квадратной матрицы

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix},$$

чтобы $j_k \neq i_l$ при $k \neq l$ и при этом величина $\sum_{k=1}^n p_{k j_k}$ достигла максимального значения.

Естественный подход к решению этой задачи состоит в выборе из всех возможных вариантов распределения такого, при котором сумма вероятностей достигнет максимума¹. Если число возможных вариантов не слишком велико, то это нетрудно. Однако в общем случае число возможных вариантов, равное $n!$, может быть велико. При этом каждый вариант требует $n-1$ операцию сложения и одну операцию сравнения. Поэтому при больших значениях n требуется направленный (упорядоченный) выбор, для осуществления которого используют методы линейного программирования и, в частности, так называемый венгерский метод [25].

Алгоритм венгерского метода состоит из подготовительного этапа и не более чем $n-2$ последовательно проводимых операции (шагов). В каждой итерации матрица подвергается эквивалентному² преобразованию, а в преобразованной матрице выбирается максимальное количество независимых нулей³. После итерации число независимых нулей, имеющих в начале итерации, увеличивается на единицу и при достижении величины n из

¹ Исключением является тривиальный случай, когда максимальные элементы строк матрицы $P = \|p_{ij}\|$ находятся в различных столбцах. Тогда оптимальным вариантом будет последовательность $\{p_{k j_k}\}$, где $p_{k j_k} = \max_{1 \leq j \leq n} p_{kj}$.

² Матрица $B = \|b_{ij}\|$ называется эквивалентной матрице $C = \|c_{ij}\|$, если $b_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j$, $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$.

³ Нулевые элементы $z_1, z_2, \dots, z_k$ квадратной матрицы называются независимыми нулями, если строки и столбцы, на пересечении которых они находятся, содержат только по одному какому-нибудь элементу z_i .

положения в матрице определяют $x_{ij}=1$, а остальные $x_{ij}=0$. Это и будет оптимальный вариант.

Теперь рассмотрим более подробно каждую часть алгоритма венгерского метода (рис. 7.1).

Подготовительный этап выполняется следующим образом. В j -м столбце ($j=1, 2, \dots, n$) исходной матрицы отыскивают максимальный элемент и вычитают из него все элементы этого столбца. В результате образуется матрица, каждый столбец которой имеет не менее одного нуля. Затем в i -й ($i=1, 2, \dots, n$) строке преобразованной матрицы отыскивают минимальный элемент и вычитают его из всех элементов строки. В матрице $P^{(0)}$ каждая строка и столбец имеют хотя бы один нуль. Отмечаем произвольный нуль в первом столбце звездочкой (*). Просматривают второй столбец и, если находят

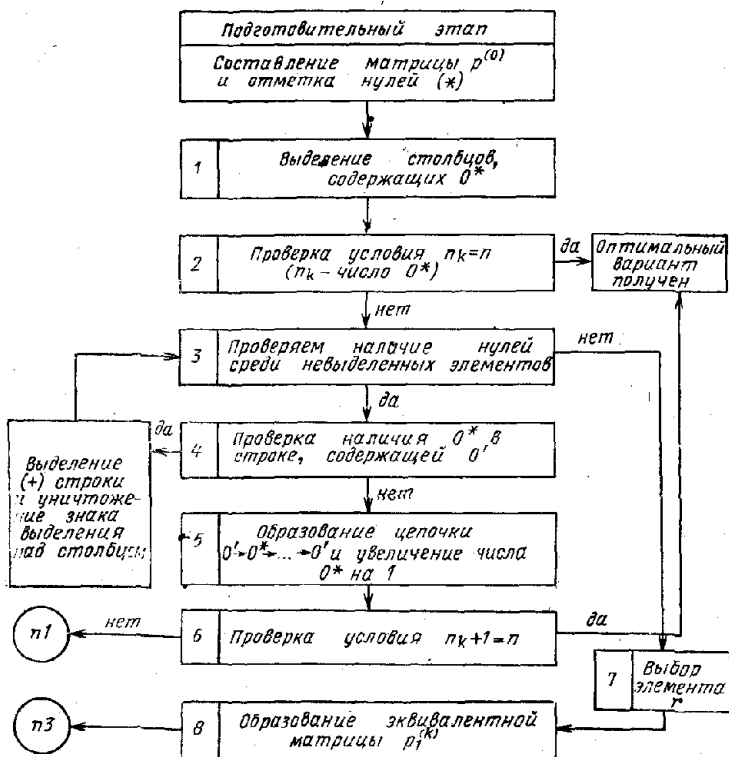


Рис. 7.1. Алгоритм венгерского метода.

нуль, в строке которого нет нуля со звездочкой, отмечают и его звездочкой, и так по всем столбцам. Очевидно, что нули матрицы $P^{(0)}$, отмеченные звездочкой, по определению являются независимыми.

На этом подготовительный этап заканчивается, и начинается итерация, которая выполняется следующим образом.

1. В матрице $P^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$ — число итераций, предшествующих данной) выделяем знаком «+» столбцы, содержащие 0^* . Элементы, лежащие в выделенных столбцах (а в дальнейшем и в строках), называются выделенными.

2. Проверяем условие $n_k = n$ (n_k — число независимых нулей 0^*). Если отмечено ровно n независимых нулей, то оптимальный вариант определяется позициями этих нулей в матрице $P^{(k)}$. Если же $n_k < n$, то переходим к п. 3.

3. Проверяем наличие нулей среди невыделенных элементов. Если их нет, то переходим к п. 7, если есть, — к п. 4.

4. Над любым невыделенным нулем ставим знак (/). Проверяем, есть ли 0^* в строке, содержащей $0'$. Если есть, то выделяем знаком (*) эту строку и уничтожаем знак выделения над столбцом, содержащим упомянутый 0^* (обводим кружком значок выделения) и переходим к п. 3. Если же в рассматриваемой строке нет 0^* , то переходим к п. 5.

5. Начиная с $0'$, в строке которой нет 0^* , строим следующую цепочку элементов матрицы $P^{(k)}$: исходный нуль со штрихом, нуль со звездочкой (если такой найдется), лежащий с ним в одном столбце, нуль со штрихом, лежащий в одной строке с предшествующим нулем со звездочкой, и т. д. Итак, цепочка $0' \rightarrow 0^* \rightarrow 0' \rightarrow \dots \rightarrow 0^* \rightarrow 0'$ образуется движением от $0'$ к 0^* по столбцу, от 0^* к $0'$ по строке. Над элементами цепочки, стоящими на нечетных местах (нули со штрихом), ставим звездочки, уничтожая их над четными элементами. Количество независимых нулей при этом возрастает на единицу. Далее уничтожаем все штрихи над элементами матрицы $P^{(k)}$, а также значки выделения ее линий (строк или столбцов) и переходим к п. 6.

6. Проверяем условие $n_k + 1 = n$. Если условие выполнено, то оптимальный вариант определяется позициями независимых нулей в матрице $P^{(k)}$. В противном случае

$(k+1)$ -я итерация закончена и надо переходить к следующей, т. е. к п. 1.

7. Выбираем элемент r , минимальный среди всех невыделенных элементов матрицы $P^{(k)}$. Вычитаем этот элемент из всех элементов матрицы $P^{(k)}$, расположенных в ее невыделенных строках, и прибавляем к элементам этой матрицы, лежащим в выделенных столбцах. Получаем новую матрицу $P_1^{(k)}$ (эквивалентную $P^{(k)}$) и переходим к п. 3 с той разницей, что $P^{(k)}$ заменяется матрицей $P_1^{(k)}$.

Таким образом, выполнив подготовительный этап и п. 1, 2 итерации, мы или получаем оптимальный план, или переходим к п. 3. Завершив п. 3, мы либо переходим к п. 4—6 (строка имеет только 0'), либо к п. 7 (все нули $P^{(k)}$ оказываются выделенными).

В первом случае после выполнения п. 4—6 $(k+1)$ -я итерация заканчивается. Во втором случае в результате п. 7, 8 переходим к матрице $P_2^{(k)} \sim P_1^{(k)} \sim P^{(k)}$, содержащей невыделенные нули, и вся последовательность операций повторяется, отправляясь от $P^{(k)}$. Можно показать [25], что после конечного числа возвращений к п. 7, 8 очередной п. 3 обязательно приведет к п. 5, 6. В результате будет увеличено число нулей со звездочкой на единицу и, следовательно, закончится $(k+1)$ -я итерация и таким образом будет получен оптимальный план не более чем за $n-2$ итераций.

Аналогичный метод можно без труда применить и при $m < n$. Для этого вводятся $n-m$ фиктивных поисковых единиц с нулевыми вероятностями обнаружения целей ($p_{ij}=0$ для $i > m$) и задача тем самым сводится к предыдущей.

Значения p_{ij}

Таблица 7.2

Номер наблюдателя i	Номер района поиска j				
	1	2	3	4	5
1	0,3	0,4	0,2	0,2	0,1
2	0,4	0,5	0,3	0,1	0,3
3	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
4	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2
5	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1

Пример 7.1. Пусть $m=n=5$ и вероятности обнаружения цели каждым из наблюдателей заданы табл. 7.2.

Для простоты расчетов умножим каждый элемент табл. 7.2 на 10 и получим исходную матрицу:

$$P = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Подготовительный этап. Находим в первом столбце матрицы P максимальный элемент. Он равен 4. Вычитаем из него все элементы первого столбца. Аналогично элементы соответствующих столбцов вычитаем из величин 5, 3, 2, 3. Поскольку в каждой строке преобразованной матрицы имеются нулевые элементы, немедленно получаем матрицу $P^{(0)}$. В первом столбце матрицы $P^{(0)}$ отмечаем звездочкой нуль, расположенный во второй строке. Во втором столбце единственный нуль принадлежит второй строке и, следовательно, звездочкой не отмечается. Аналогично не отмечаем нули в третьем и пятом столбцах. В четвертом столбце отмечаем нуль, расположенный в первой строке, где нет нулей со звездочкой. В результате предварительного этапа получаем матрицу $P^{(0)}$ с отмеченными нулями:

$$P = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow P^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

подготовительный этап

Количество независимых нулей равно двум, следовательно, для получения решения необходимо проведение трех итераций.

Итерация 1. Согласно п. 1—4 выделяем значком «+» первый и четвертый столбцы матрицы $P^{(0)}$, содержащие нули со звездочкой, и переходим к просмотру невыделенных нулей, начиная со второго столбца. Отмечаем штрихом нуль во втором столбце, лежащий во второй строке. Поскольку в этой строке имеется 0^* , она подлежит выделению. Одновременно уничтожается (обводится кружком) значок выделения над первым столбцом, содержащим 0^* во второй строке. Обращаемся к невыделенным нулям первого столбца и отмечаем штрихом нуль этого столбца, лежащий в третьей строке. Третья строка матрицы $P^{(0)}$ не содержит 0^* , и поэтому переходим к п. 5. От последнего нуля со штрихом (третья строка, первый столбец)

двигаемся по столбцу до нуля со звездочкой (первый столбец, вторая строка). Затем от 0^* , находящегося на пересечении второй строки и первого столбца, переходим к $0'$, расположенному в той же строке второго столбца, и на этом образование цепочки $0'_{21}$, $0'_{21}$, $0'_{22}$ закончено. Нули цепочки со штрихом отмечаем звездочками и уничтожаем звездочку над ее единственным четным элементом, а также все значки выделения:

$$P^{(0)} = \begin{array}{c} \oplus \quad \quad + \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0 & 1 & 0 & \\ 0' & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right| \end{array} + = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0 & 0^* & 0 & 1 & 0 \\ 0^* & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

В результате итерации 1 число независимых нулей стало равным трем.

Итерация 2. Выделяем первый, второй и четвертый столбцы, содержащие нули со звездочками. Поиск нуля, расположенного во второй строке первого из невыделенных столбцов, приводит к выделению этой строки и уничтожению знака «+» над вторым столбцом. После этого все нулевые элементы матрицы $P^{(1)}$ оказываются выделенными, и поэтому переходим к п. 7,8. Минимальный элемент из числа невыделенных элементов матрицы $P^{(1)}$ равен единице. Вычитаем его из элементов 1, 3, 4 и 5 строк матрицы $P^{(1)}$, а к элементам 1 и 4 столбцов той же матрицы прибавляем его. В результате получаем матрицу $P_1^{(1)} \sim P^{(1)}$:

$$P^{(1)} = \begin{array}{c} + \oplus \quad \quad + \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0 & 0^* & 0' & 1 & 0 \\ 0^* & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right| \end{array} + \rightarrow P_1^{(1)} = \begin{array}{c} + \quad \quad + \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0' & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 0' & 2 & 0 \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0' & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} +$$

Переносим все значки (+, *, /) на матрицу $P_1^{(1)}$ и переходим к п. 3. В первых двух столбцах $P_1^{(1)}$ нет невыделенных нулей. Поэтому в третьем столбце отмечаем штрихом его невыделенный нуль. Поскольку в строке, содержащей этот нуль, нет нулей со звездочкой, переходим к п. 5. Легко установить, что соответствующая п. 5 цепочка состоит из одного элемента $0'_{43}$.

Аналогично выполняется итерация 3:

$$p^{(2)} = \begin{array}{c} + \oplus \oplus \oplus \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0^* & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 0 & 2 & 0^* \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0^* & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0^* & 1 \end{array} \right| + \end{array} \rightarrow p_1^{(2)} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0^* \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0^* & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0^* & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

В результате оптимальный способ можно выразить формулой

$$\{p_{12}, p_{25}, p_{31}, p_{43}, p_{54}\},$$

где $\sum_{k=1}^5 p_{kj} = 1,5.$

Таким образом, первого наблюдателя следует направить во второй район, второго — в пятый район, третьего — в первый район, четвертого — в третий район и пятого — в четвертый район. Математическое ожидание числа обнаружений будет равно 1,5.

Поиск при неравномерном распределении объектов по районам поиска. Предположим, что требуется распределить m различных наблюдателей по n районам поиска. Пусть вероятность нахождения объекта поиска в j -м районе равна $w_j (j=1, \dots, n)$, а вероятность его обнаружения i -м наблюдателем ($i=1, \dots, m$) в том же районе равна p_{ij} . Обозначим через x_{ij} вероятность того, что i -й наблюдатель назначается для выполнения поиска в j -м районе. При этом

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й наблюдатель не направляется} \\ & \text{в } j\text{-й район;} \\ 1, & \text{если } i\text{-й наблюдатель направляется} \\ & \text{в } j\text{-й район.} \end{cases} \quad (7.4)$$

При этом будем полагать, что в одном районе не могут действовать два или более наблюдателей, т. е. удовлетворяются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}; j=1, \dots, n; \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; i=1, \dots, m. \quad (7.5)$$

Очевидно, что оптимальный план распределения наблюдателей должен максимизировать вероятность P обнаружения цели. Обозначим $p_{ij}w_j = a_{ij}$, тогда

$$P = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} a_{ij}. \quad (7.6)$$

Поскольку все n условий (7.6) могут быть выполнены лишь при $m \leq n$, для решения данной задачи можно использовать рассмотренный выше венгерский метод линейного программирования. Проиллюстрируем это на следующем примере [6].

Пример 7.2. Пусть $m=n=4$. Вероятности нахождения объекта поиска W_j и вероятности обнаружения его каждым из наблюдателей в различных районах приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Значения w_j и p_{ij}

Номер наблюдателя	Номер района поиска			
	1	2	3	4
1	0,81	0,65	0,32	0,47
2	0,66	0,51	0,19	0,75
3	0,32	0,17	0,39	0,15
4	0,43	0,46	0,58	0,60
w_j	0,20	0,40	0,30	0,10

Для упрощения расчетов каждый элемент исходной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ умножим на 10^3 (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Элементы матрицы $A = \|a_{ij} \cdot 10^3\|$

Номер наблюдателя	Номер района поиска			
	1	2	3	4
1	162	260	96	47
2	132	204	57	75
3	64	68	117	15
4	86	184	174	60

A =	162 260 96 47	→ A ⁽⁹⁾ = подготови- тельный этап	0* 0 78 28	+	итера- ция 1
	132 204 57 75		30 56 117 0*	→	
	64 68 117 15		41 135 0* 3		
	86 184 174 60		76 76 0 15		

$$A_2^{(a)} = \begin{array}{c} \oplus \\ \begin{array}{cccc} 0^* & 0' & 121 & 58 \\ 0' & 26 & 120 & 0^* \\ 8 & 102 & 0^* & 0' \\ 43 & 43 & 0' & 12 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} \rightarrow A_2^{(a)} = \begin{array}{cccc} 0 & 0^* & 121 & 58 \\ 0^* & 26 & 120 & 0 \\ 8 & 102 & 0 & 0^* \\ 43 & 43 & 0^* & 12 \end{array}$$

← n.3-4-5 → ← n.6 →

$$S_i (i = 1, \dots, m) \text{ и } \sum_{i=1}^m S_i = S_p.$$

Требуется определить площади районов для каждого из наблюдателей при условии, что математическое ожидание числа обнаруженных объектов поиска за время t будет максимальным.

Обозначим через F_i потенциал обнаружения i -го наблюдателя. Допустим, что наблюдатели осуществляют поиск независимо друг от друга. Тогда для расчета принятого показателя эффективности M (математического ожидания числа обнаруженных объектов поиска) можно использовать формулу

$$M = \sum_{i=1}^m (1 - e^{-F_i}).$$

Оптимальному распределению будет соответствовать максимум или минимум математического ожидания M числа необнаруженных объектов, т. е.

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^m e^{-F_i}.$$

Таким образом, необходимо найти числа $F_1^{(0)}, F_2^{(0)}, \dots, F_m^{(0)}$, обращающие в минимум выпуклую функцию¹

$$\bar{M}(F_1, F_2, \dots, F_m) = \sum_{i=1}^m e^{-F_i}$$

при ограничении

$$Z(F_1, \dots, F_m) = \sum_{i=1}^m F_i - F \leq 0,$$

где F — общий потенциал. Можно показать, что при $F_i = F/m$ $M_{\min} = m e^{-F/m}$.

¹ Функция называется выпуклой, если для любых двух точек x' и x'' функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f[\alpha x' + (1-\alpha)x''] \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'')$$

при любом α в пределах от 0 до 1. Если же

$$f[\alpha x' + (1-\alpha)x''] \geq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x''),$$

то $f(x)$ называется вогнутой функцией. Кривая выпуклая (вогнутая), если отрезок, соединяющий любые две ее точки, лежит на кривой или выше (ниже) ее. Линейная функция удовлетворяет обоим этим условиям и является поэтому единственной функцией, которая может быть отнесена и к выпуклым, и к вогнутым.

Действительно, так как среднее арифметическое нескольких положительных чисел больше или в крайнем случае равно их среднему геометрическому, имеем

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e^{-F_i} \geq \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m e^{-F_i}} = e^{-\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_i} = e^{-F/m}.$$

Следовательно, при распределении однородных наблюдателей для поиска однотипных объектов необходимо, чтобы вероятности обнаружения каждого объекта были бы одинаковыми. Отсюда $S_i = S/m$, где S_i — площадь поиска наблюдателя i -го типа.

При распределении неоднородных наблюдателей для поиска однотипных объектов требуется соблюдение следующего условия:

$$\frac{u_1 x_1}{S_1} = \dots = \frac{u_j x_j}{S_j} = \dots = \frac{u_n x_n}{S_n} = \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{S},$$

где u_j — поисковая производительность наблюдателя j -го типа; S_j — площадь района поиска наблюдателей j -го типа; x_j — число наблюдателей j -го типа; n — число типов наблюдателей. Отсюда получим

$$S_j = \frac{S u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j x_j}.$$

Тогда площадь района поиска для каждого наблюдателя j -го типа будет определяться по формуле

$$S_i^{(j)} = \frac{S u_j}{\sum_{j=1}^n u_j x_j},$$

где $S_i^{(j)}$ — площадь района поиска i -го наблюдателя ($i = 1, \dots, m$) j -го типа ($j = 1, \dots, n$).

Распределение совместных усилий группы однородных наблюдателей для поиска неоднотипных объектов. Предположим, что группа однородных наблюдателей, обладающая поисковой производительностью U должна

за время T обследовать n районов. Вероятность нахождения объекта в j -м районе ($j=1, \dots, n$) примем равной ω_j , а вероятность ее обнаружения определяется по формуле

$$p_j = 1 - e^{-Ut_j/S_j},$$

где t_j — время обследования j -го района ($\sum_{j=1}^n t_j = T$);

S_j — площадь j -го района.

Исходя из независимости действий наблюдателей, математическое ожидание числа обнаруженных объектов можно определить по формуле

$$M = \sum_{j=1}^n \omega_j (1 - e^{-Ut_j/S_j}). \quad (7.7)$$

Таким образом, поисковые ресурсы, обозначенные $Ut_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$), удовлетворяют соотношению $U \sum_{j=1}^n t_j = Ut$, а оптимальный план их распределения представляет собой вектор $(t_1^{(0)}, \dots, t_n^{(0)})$, который максимизирует функцию M и удовлетворяет ограничениям: $\sum_{j=1}^n t_j = T$ и $T > 0$.

Без нарушения общности выражение (7.7) можно переписать следующим образом:

$$M = \sum_{j=1}^n \omega_j (1 - e^{-a_j/x_j}), \quad (7.8)$$

где

$$x_j = t_j/T; \quad a_j = Ut/S_j.$$

Следовательно, формально задача сводится к максимизации (7.8). Эта задача эквивалентна определению вектора $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, минимизирующего функцию

$$\sum_{j=1}^n \omega_j e^{-a_j x_j},$$

где $a_j, \omega_j > 0$, подчиненную ограничениям $x_j \geq 0, \sum_{j=1}^n x_j = 1$.

Ее решение изложено в § 1.4.

Распределение однородных наблюдателей по районам при поиске неоднотипных объектов. Пусть имеется m однородных наблюдателей, предназначенных для поиска объектов в n районах. Вероятность нахождения объекта поиска в j -м районе ($j=1, \dots, n$) примем равной w_j , а вероятность его обнаружения, исходя из независимости действий наблюдателей, пусть определяется по формуле

$$p_j = 1 - \exp\left(-\frac{ut}{S_j} x_j\right),$$

где u — поисковый потенциал одного наблюдателя; t — время поиска; x_j — число наблюдателей в j -м районе. Тогда математическое ожидание числа обнаруженных объектов будет

$$M = \sum_{j=1}^n w_j \left(1 - \exp\left(-\frac{ut}{S_j} x_j\right)\right). \quad (7.9)$$

Таким образом, поисковые ресурсы, обозначенные $x_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$), удовлетворяют соотношению $\sum_{j=1}^n x_j = m$, а оптимальный план их распределения представляет собой вектор $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, который максимизирует функцию M и удовлетворяет соответствующим ограничениям.

Обозначим $a_j = ut/S_j$. Тогда

$$M = \sum_{j=1}^n w_j (1 - e^{-a_j x_j}).$$

Следовательно, задача формально сводится к максимизации M при условии, что

$$\sum_{j=1}^n x_j = m, \quad x_j \geq 0, \quad a_j > 0, \quad w_j > 0.$$

Сформулированную задачу можно рассматривать как динамический n -шаговый процесс, принимая за шаги последовательное распределение наблюдателей для поиска в первом, втором и последующих районах. Этот метод основан на принципе оптимальности динамического программирования, который рассмотрен в § 1.4.

Предварительная стадия динамического программирования начинается с планирования шага 1 (до конца

процесса остается один шаг). Для этого определим функцию $f_1(x_1)$ как максимум математического ожидания числа обнаруженных объектов, полученного в результате шага 1, на котором все имеющиеся к этому шагу наблюдатели x_1 направляются в первый район:

$$f_1(x_1) = w_1(1 - e^{-a_1 x_1}), \quad (7.10)$$

где w_1 — вероятность нахождения объекта в первом районе, а $a_1 = ut/S_1$, где, в свою очередь, S_1 — площадь первого района.

Из выражения (7.10) видно, что для распределения наблюдателей на шаге 1 необходимо знать результаты предыдущего шага, т. е. сколько осталось наблюдателей к шагу 1 после шага 2. Сделаем предположения о результатах шага 2, т. е. составим последовательность $\{x_1\} = (0, 1, \dots, m)$ и для каждого значения x_1 вычислим функцию $f_1(x_1)$. В результате для каждого значения x_1 получим условно оптимальное число наблюдателей для поиска в первом районе. Обозначим это число через $x_0(x_1)$.

Математическое ожидание числа обнаруженных объектов на шаге 2 (до конца процесса осталось два шага), когда из имеющихся x_2 наблюдателей выделяют-ся наблюдатели для поиска во втором районе, будет равно

$$w_2[1 - e^{-a_2(x_2 - x_1)}] + f_1(x_1).$$

Задаваясь последовательностью $\{x_2\} = (0, 1, \dots, m)$, можно найти максимум последнего выражения по x_1 , т. е. найти функцию

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq x_1 \leq x_2} \{w_2[1 - e^{-a_2(x_2 - x_1)}] + f_1(x_1)\}. \quad (7.11)$$

Из выражения (7.11) видно, что значение функции $f_2(x_2)$ зависит от x_1 и x_2 . В свою очередь, число наблюдателей не может быть меньше, чем x_1 . Число наблюдателей x_1 , для которого выполняется выражение (7.11), обозначим через $x_1(x_2)$.

Используя такие же рассуждения, к шагу 2 присоединим шаг 3 и т. д. до шага n . В результате получим рекуррентное соотношение

$$f_n(m) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq m} \{w_n[1 - e^{-a_n(m - x_{n-1})}] + f_{n-1}(x_{n-1})\}.$$

На этом заканчивается предварительная (условная) оптимизация и находится условно оптимальное n -шаговое поведение $x_0(x_1)$, $x_1(x_2)$, ..., $x_{n-1}(x_n)$ и математическое ожидание числа обнаруженных объектов $f_n(m)$.

На окончательной стадии определяется для каждого шага (от шага к шагу 1) окончательное (безусловное) оптимальное распределение наблюдателей. Эта стадия никаких трудностей не представляет, так как рекомендации по оптимальному распределению уже готовятся на первой стадии. Действительно, поскольку известно начальное состояние системы (число наблюдателей m) и известно, что на шаге n надо применить уже выработанное условно оптимальное распределение для этого шага, то оптимальное число наблюдателей в n -м районе будет $x_n^* = m - x_{n-1}(x_n)$. Определив x_n^* , легко найти x_{n-1}^* , x_{n-2}^* , ..., окончательно получим $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, т. е. определим оптимальное распределение наблюдателей по районам поиска, приводящее к максимуму математического ожидания числа обнаруженных объектов.

Таким образом, распределение однородных наблюдателей по районам при поиске неоднородных объектов методом динамического программирования представляет собой многошаговый процесс, который проходит дважды:

— первый раз — от конца к началу, в результате чего находится условно оптимальное распределение на каждом шаге и математическое ожидание числа обнаруженных объектов на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;

— второй раз — от начала к концу, в результате чего находится безусловно оптимальное распределение наблюдателей по районам поиска.

Пример 7.3. Пусть $n=4$, $m=5$, $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $w_1=1/2$, $w_2=1/4$, $w_3=3/5$, $w_4=1/5$. Распределить наблюдателей по районам поиска.

Решение. Вычислим с помощью выражений (7.10)–(7.11) табл. 7.5, 7.6, а используя рекуррентные соотношения

$$f_3(x_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq x_3} \{w_3 [1 - e^{-a_3(x_3-x_2)}] + f_2(x_2)\},$$

и

$$f_4(x_4) = \max_{0 \leq x_3 \leq x_4} \{w_4 [1 - e^{-a_4(x_4-x_3)}] + f_3(x_3)\}.$$

вычислим табл. 7.7, 7.8

$n=3$

x_3	x_2						$x_2(x_3)$	$f_3(x_3)$
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0,38+0	0,0+0,31					0	0,38
2	0,52+0	0,38+0,31	0+0,47				1	0,69
3	0,6+0	0,52+0,31	0,38+0,47	0+0,59			2	0,85
4	0,6+0	0,6+0,31	0,52+0,47	0,38+0,59	0+0,66		2	0,99
5	0,6+0	0,6+0,31	0,6+0,47	0,52+0,59	0,38+0,66	0+0,71		

299

Таблица 7.5

 $n=1$

x_1	$x_0(x_1)$	$f_1(x_1)$
0	0	0
1	1	0,31
2	2	0,43
3	3	0,50
4	4	0,50
5	5	0,50

Таблица 7.6

 $n=2$

x_2	x_1						$x_1(x_2)$	$f_2(x_2)$
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0,16+0	0+0,31					1	0,31
2	0,21+0	0,16+0,31	0+0,43				1	0,47
3	0,25+0	0,21+0,31	0,16+0,43	0+0,5			2	0,59
4	0,25+0	0,25+0,31	0,21+0,43	0,16+0,5	0+0,5		3	0,66
5	0,25+0	0,25+0,31	0,25+0,43	0,21+0,5	0,16+0,5	0+0,5	3	0,71

$n=4$

x_4	x_3						$x_3(x_4)$	$f_4(x_4)$
	0	1	2	3	4	5		
5	0,2+0	0,2+0,38	0,2+0,69	0,17+0,85	0,13+0,99	0+1,11	4	1,12

Теперь надо снова пройти всю последовательность шагов, но уже от начала к концу. Следует произвести вычисления по следующим формулам:

$$x^*_4 = m - x_3(x_4) = 5 - 4 = 1,$$

$$x^*_3 = x_3(x_4) - x_2(x_3) = 4 - 2 = 2,$$

$$x^*_2 = x_2(x_3) - x_1(x_2) = 2 - 1 = 1,$$

$$[x^*_1 = m - (x^*_4 + x^*_3 + x^*_2) = 5 - 4 = 1.$$

Таким образом, для принятых условий нашли, что $x^* = (1, 1, 2, 1)$, т. е. два наблюдателя следует направить в третий район и по одному — во все остальные. Математическое ожидание числа обнаруженных объектов в этом случае будет $0,13 + 0,52 + 0,16 + 0,31 = 1,12$.

Можно убедиться, что x^* действительно оптимальный план, если рассчитать для каждого возможного плана математическое ожидание числа обнаруженных объектов. Число таких планов определяется по формуле

$$N = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{(5+4-1)!}{5!(4-1)!} = 56.$$

Так как для каждого плана необходимо выполнить шесть операций, всего потребуется чуть более 300 операций, что существенно больше по сравнению с вычислениями табл. 7.5—7.8.

Распределение неоднородных наблюдателей по районам при поиске неотнотипных объектов. Предположим, что необходимо распределить по n районам m групп наблюдателей. В каждой i -й группе ($i=1, \dots, m$) имеется N_i наблюдателей. Обозначим через w_j вероятность нахождения объекта в j -м районе ($j=1, \dots, m$), а через p_{ij} — вероятность его обнаружения в этом же районе наблюдателем i -й группы. Тогда, исходя из независимости

действий наблюдателей, математическое ожидание числа обнаруженных объектов составит

$$M = \sum_{j=1}^n \omega_j \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \right],$$

где x_{ij} — число наблюдателей i -го типа, осуществляющих поиск в j -м районе.

Очевидно, что оптимальный план распределения наблюдателей представляет матрицу $X = \|x_{ij}\|$, элементы которой дают наибольшее значение M . При этом величины x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i; \quad i = 1, \dots, m;$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Приближенный алгоритм получения оптимального решения заключается в следующем [26].

1. Элементы столбцов матрицы $P = \|p_{ij}\|$ умножаем на соответствующие значения ω_j и получаем исходную матрицу

$$R^{(0)} = \|r_{ij}^{(0)}\| = \|\omega_j p_{ij}\|.$$

2. В матрице $R^{(0)}$ (в последующем в матрице $R^{(k)}$, где k — номер шага) отыскиваем максимальный элемент $r_{i_1 j_1}^{(0)}$.

3. Назначаем в j_1 -й район один наблюдатель из i_1 -й группы, вычитаем из N_{i_1} единицу и пересчитываем j_1 -й столбец матрицы $R^{(0)}$, получая таким образом матрицу $R^{(1)}$: $r_{i_1 j_1}^{(1)} = r_{i_1 j_1}^{(0)} (1 - p_{i_1 j_1})$; $i = 1, \dots, m$;

Таблица 7.9

Значения p_{ij}

Номер группы i	Номер района j		
	1	2	3
1	0,40	0,10	0,50
2	0,20	0,40	0,20

Таблица 7.10

Значения $r_{ij}^{(0)}$

Номер группы i	Номер района j		
	1	2	3
1	0,12	0,02	0,25
2	0,06	0,08	0,10

4. Проверяем, исчерпаны ли наблюдатели: если нет, то переходим к п. 2, если да, то оптимальный план получен. Число шагов равно $\sum_{i=1}^m N_i$.

Пример 7.4. Пусть $m=2$, $n=3$, $N_1=6$, $N_2=10$, $\omega_1=0,3$, $\omega_2=0,2$, $\omega_3=0,5$ вероятности p_{ij} заданы в табл. 7.9.

1. Вычисляем элементы исходной матрицы $r_{ij}^{(0)}$ (табл. 7.10).
2. Находим в табл. 7.9 максимальный элемент, которым является $r_{13}^{(0)} = 0,25$.
3. Назначаем для поиска в третьем районе ($j_1=3$) наблюдателя первой группы ($i_1=1$): $x_{13}^{(1)}=1$. Уменьшаем число наблюдателей первой группы на единицу $N_1=6-1=5$, число наблюдателей во второй группе остается без изменений.
4. Пересчитываем третий столбец матрицы $R^{(0)}$: $r_{13}^{(1)}=0,25 \cdot 0,5 = 0,125$; $r_{23}^{(1)} = 0,10 \cdot 0,5 = 0,05$. В результате получаем матрицу $R^{(1)}$ (табл. 7.11)

Таблица 7.11

Значения $r_{ij}^{(1)}$

Номер группы i	Номер района j		
	1	2	3
1	0,12	0,02	0,125
2	0,06	0,08	0,05

Таблица 7.12

Значения x_{ij}

Номер группы i	Номер района j		
	1	2	3
1	3	0	3
2	3	5	2

Приступаем к шагу 2.

5. Максимальный элемент в матрице $R^{(1)}$ равен $r_{13}^{(1)}=0,125$. Поэтому $x_{13}^{(2)} = x_{13}^{(1)} + 1 = 2$; $r_{13}^{(2)} = 0,125 \cdot 0,5 = 0,062$; $r_{23}^{(2)} = 0,05 \cdot 0,5 = 0,025$; $N_1 = 5 - 1 = 4$; $N_2 = 10$. Приступаем к шагу 3.

6. Максимальный элемент в матрице $R^{(2)}$ равен $r_{11}^{(2)} = 0,12$. Поэтому $x_{11}^{(3)} = 1$; $x_{13}^{(3)} = 2$; остальные $x_{ij} = 0$; $r_{11}^{(3)} = 0,12 \cdot 0,6 = 0,072$; $r_{21}^{(3)} = 0,06 \cdot 0,6 = 0,036$; $N_1 = 4 - 1 = 3$; $N_2 = 10$ и т. д.

После 16 шагов получаем окончательное решение (табл. 7.12).

Математическое ожидание числа обнаруженных объектов соответствующее полученному варианту распределения, равно $M=0,911$.

Для оценки полученного распределения наблюдателей $X = \|x_{ij}\|$ можно определить отклонение Δ математического ожидания числа обнаруженных целей $M[x]$ для этого распределения от математического ожидания числа обнаруженных объектов для оптимального плана $M[x_{\text{опт}}]$.

Алгоритм расчета Δ основан на одном из методов возможных направлений выпуклого программирования и заключается в следующем [26].

Определяются компоненты матрицы возможного направления $S = \|s_{ij}\|$: $s_{ij} = \tilde{x}_{ij} - x_{ij}$. Для нахождения величин $\tilde{x}_{ij}$ необходимо вычислить матрицу значений

$$y_{ij} = \omega_j \alpha_{ij} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_{ij} \right),$$

где $\alpha_{ij} = -\ln(1 - p_{ij})$, и отыскать в каждой строке максимальный элемент. Положение максимальных элементов определяет значения x_{ij} , равные N_i ($i = 1, \dots, m$), остальные x_{ij} принимаются равными нулю.

Величину Δ рассчитываем по формуле

$$\Delta = \sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_{ij} s_{ij} \right).$$

Для условий примера 7.4 имеем $\Delta = 0,042$. Следовательно, для оптимального плана распределения математическое ожидание числа обнаруженных объектов составляет 0,9152. Однако следует заметить, что в большинстве случаев оптимальный план является нецелочисленным и поэтому практически не может быть реализован. Так, для условий примера 7.4 в табл. 7.13 приводятся планы распределения, полученные методом четырех итераций (приближений) к оптимальному решению [26].

Таблица 7.13

Номер итерации k	План распределения						$\Delta^{(k)}$	$M[x^{(k)}]$
	$x_{11}^{(k)}$	$x_{12}^{(k)}$	$x_{13}^{(k)}$	$x_{21}^{(k)}$	$x_{22}^{(k)}$	$x_{23}^{(k)}$		
0	3	0	3	3	5	2	0,042	0,9110
1	2,87	0	3,13	2,87	4,79	2,34	0,019	0,9123
2	2,72	0	3,28	2,72	5,07	2,21	0,015	0,9129
3	2,48	0	3,52	3,37	4,61	2,02	0,014	0,9135
4	2,59	0	3,41	3,26	4,79	1,95	0,009	0,9136

Из табл. 7.13 видно, что если ξ — допустимое (заданное) отклонение $M[x^{(k)}]$ от $M[x_{\text{опт}}]$ равно 0,01, то после четырех итераций план распределения будет

$$X^{(4)} = \begin{vmatrix} 2,59 & 0 & 3,41 \\ 3,26 & 4,79 & 1,95 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что для реализации плана $X^{(4)}$ необходимо округлить число наблюдателей, направленных в тот или иной район поиска. В результате получим

$$\tilde{X}^{(4)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться, что план $\tilde{X}^{(4)}$ полностью совпадает с планом $X^{(0)}$. Таким образом, для практических целей допустимо использование приближенного алгоритма, а качество полученного плана и границу его применимости можно определить с помощью величины Δ .

7.4. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОИСКОВЫХ РЕСУРСОВ

Матричная игра. Предположим, что имеется n районов поиска, в одном из которых заведомо находится объект поиска. Пусть в нашем распоряжении находится N однотипных наблюдателей. Требуется найти оптимальный способ распределения наблюдателей по районам поиска, при максимизирующей вероятности обнаружения объекта, выбирающего в свою очередь такой район, чтобы минимизировать эту вероятность.

Очевидно, что j -й стратегией игрока II (объекта поиска) будет нахождение в j -м районе. Соответственно, игрок I может послать в j -й район q_j единиц, соблюдая условие $\sum_1^n q_j = N$. Например, можно в первый район

послать все N единиц и ни одной во все остальные. Или же в первый район послать $N-1$ единиц, во второй одну единицу, а в остальные — ни одной и т. д.

Поэтому i -й стратегией игрока I будет последовательность $\{q_i^{(i)}\}$, в соответствии с которой в j -й район посылается $q_j^{(i)}$ единиц при условии $\sum_{j=1}^n q_j^{(i)} = N$ для $i = 1, 2, \dots, m$, где m — число стратегий игрока I.

В свою очередь, число стратегий игрока I определяется по формуле

$$m = C_{N+n-1}^N = \frac{(N+n-1)!}{N!(n-1)!}. \quad (7.12)$$

При этом как любая стратегия игрока I, так и игрока II не учитывает информацию о ходе противника, так как в противном случае теоретико-игровая ситуация потеряла бы смысл и все единицы были бы направлены в район с наименьшим числом поисковых единиц.

Обозначим через w_j вероятность обнаружения объекта в j -м районе одной поисковой единицей и, как обычно, примем, что события, состоящие в обнаружениях объекта несколькими поисковыми единицами, независимы. Тогда вероятность обнаружения объекта в j -м районе при i -м плане распределения поисковых единиц является значением функции выигрыша и определяется по формуле

$$p_{ij} = 1 - (1 - w_j)^{q_j^{(i)}}, \quad (7.13)$$

где $q_j^{(i)}$ — число поисковых единиц, направляемых в j -й район по i -му плану.

В результате получаем теоретико-игровую модель распределения поисковых ресурсов по районам поиска с учетом тактики действий противника — матричную игру, матрица которой $P = \|p_{ij}\|$. Принцип выбора оптимального плана распределения поисковых единиц для данной модели сводится к обеспечению максимального успеха в наименее благоприятных условиях. Такими условиями являются вероятности y_j , с которыми объект поиска выбирает j -й район, т. е. компоненты вектора смешанной стратегии игрока II. Физическим смыслом вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ является распределение вероятности нахождения объекта поиска в j -м районе, т. е. вектор y представляет также числа $y_1, y_2, \dots, y_n$, для которых действительно $y_j \geq 0$ при $j=1, \dots, n$ и $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Отсюда для неблагоприятного распределения вероятностей y^* , можно найти вероятности x^* , реализации каждого плана распределения поисковых единиц (оптимальную стратегию игрока I) и вероятность обнаруже-

ния объекта поиска в этом случае (значение игры) по формуле

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i^* y_j^*,$$

где x_i^* — i -я компонента оптимальной смешанной стратегии игрока I; y_j^* — j -я компонента оптимальной стратегии игрока II.

Применение игроком I оптимальной стратегии x^* гарантирует ему вероятность обнаружения цели не менее V независимо от вида стратегии, применяемой игроком II. В свою очередь, применение игроком II оптимальной стратегии гарантирует ему проигрыш не более V независимо от вида стратегии игрока I. Поэтому ни один из игроков, получив информацию о том, что его противник применяет оптимальную стратегию, не может использовать эти дополнительные сведения в своих интересах. Более того, при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш уменьшается для отклоняющегося.

Таким образом, для получения оптимального плана распределения поисковых ресурсов в условиях конфликтной ситуации необходимо найти вектор x^* . Алгоритм вычисления этого вектора заключается в следующем.

Проверяется наличие седловой точки $(m \times n)$ -матрицы — пары целых чисел i_0 и j_0 , для которых $p_{i_0 j_0}$ оказывается одновременно минимумом своей строки и максимумом своего столбца. Если седловая точка имеется, то решением игры является пара чистых стратегий (i_0, j_0) , т. е. $x_{i_0}^* = 1$ и $y_{j_0}^* = 1$, а остальные x_i^* и y_j^* равны нулю. В противном случае используется одна из вычислительных процедур, рассмотренных в § 1.5.

Пример 7.5 [8]. На промысле дислоцируются n^* промысловых судов, которые на основе анализа работы за предыдущие сутки следует расставить на следующие сутки. Допустим, что добыча рыбы-сырца ведется днем, а передислокация промысловых судов — ночью; при этом расстояние между промысловыми районами таково, что суда могут переместиться в течение ночи в любую точку рассматриваемых районов промысла.

В данной поисковой ситуации, с одной стороны, выступают промысловики, с другой — природа. Для разрешения подобной конфликтной ситуации поиска можно использовать теоретико-игровую

модель (матричную игру), позволяющую найти оптимальную расстановку отряда судов в районе промысла, обеспечивающую при любой промысловой обстановке среднесуточный улов не менее значения игры.

Пусть за истекшие пять суток флот работал в трех районах промысла и предполагается (прогнозы промразведки), что рыба не переместится за пределы рассматриваемых районов. Среднесуточные уловы (в тоннах) на одно промысловое судно примем за выигрыши промысловиков, а номера районов и суток будем рассматривать как стратегии промысловиков и природы соответственно. Тогда матрица игры примет следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} 7,5 & 6 & 7 & 7,5 & 6,6 \\ 6 & 7,5 & 10,5 & 7,5 & 12 \\ 9 & 12 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение матрицы A (см. [8]) дает $x^* = (13/23; 9/23; 1/23)$ и $v = 7,05$. Если имеется 25 отрядов промысловых судов (по 8—9 судов в отряде), то согласно оптимальной стратегии x^* их надо распределить по районам промысла следующим образом: в первом районе промысла $25 \times 13/23 \approx 14$ отрядов; во втором районе промысла $25 \times 9/23 \approx 10$ отрядов; в третьем районе промысла $25 \times 1/23 \approx 1$ отряд.

Бесконечная антагонистическая игра. Довольно часто матричная игра имеет столь большие размеры, что вычислить ее матрицу и найти решение оказывается сложно. В этом случае, как показано в [26], целесообразно заменить первоначальную матричную игру бесконечной следующего вида:

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^n [1 - (1 - w_j)^{x_j}] y_j, \quad (7.14)$$

где переменные x_j принимают произвольные (не обязательно целые) значения в замкнутом интервале $[0, N]$,

подчиненные единственному условию $\sum_{j=1}^n x_j = N$.

Проанализируем структурные свойства функции выигрыша новой игры по переменной x . Эта функция является непрерывной по x на интервале $[0, N]$ и вогнутой по системе переменных x_j для любого y . Следовательно, оптимальная стратегия игрока I будет определяться как чистая стратегия, максимизирующая величину $\min_i [1 - (1 - w_i)^{x_i}]$.

Отсюда значение видоизмененной игры будет $V = 1 - (1 - w_j)^{\bar{x}_j}$, где $\bar{x}_j$ — компонента вектора оптимальной стратегии игрока I.

Положив $\alpha = (1 - w_j)^{\bar{x}_j}$, после логарифмирования получим

$$\bar{x}_j = \frac{\ln \alpha}{\ln (1 - w_j)}. \quad (7.15)$$

Так как $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j = N$, найдем

$$N = \ln \alpha \sum \frac{1}{\ln (1 - w_j)}.$$

Отсюда

$$\ln \alpha = \frac{N}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\ln (1 - w_j)}}. \quad (7.16)$$

После подстановки (7.16) в (7.15) окончательно найдем

$$\bar{x}_j = \frac{N}{\ln (1 - w_j) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\ln (1 - w_j)}}. \quad (7.17)$$

В общем случае $\bar{x}_j$ — нецелочисленная величина. Для получения целочисленных компонент вектора оптимальной стратегии игрока I воспользуемся следующим приемом.

Поставим в соответствие каждой нецелочисленной компоненте $\bar{x}_j$ ближайшие к ней целые значения сверху и снизу ($x_j^{(1)}$ и $x_j^{(2)}$). Составим теперь все векторы вида

$$X^{(\gamma)} = (x_1^{(\gamma)}, \dots, x_n^{(\gamma)}), \quad (7.18)$$

где при целочисленном $\bar{x}_j$ принимается $x_j^{(\gamma)} = \bar{x}_j$, а при нецелочисленном в $x_j^{(\gamma)}$ можно взять $\gamma = 1$ или $\gamma = 2$.

Очевидно, если X имеет r нецелочисленных компонент, то общее число векторов вида (7.18) равно 2^r . Сказанное означает, что точка, описывающая стратегию игрока I, заключена в расположенный в n -мерном простран-

стве r -мерный куб с целочисленными вершинами вида (7.18). Ограничимся теми из этих вершин, у которых сумма компонент равна N , т. е.

$$\sum_{j=1}^n x_j^{(r)} = N \quad \text{для } r = [1, 2].$$

Отобранные целочисленные планы вида (7.18) можно принять в качестве чистых стратегий в новой, третьей матричной игре. Число столбцов в матрице этой игры равно числу столбцов в матрице первоначальной игры, а число строк m^* существенно меньше, чем m . Во всех случаях $m^* < 2^r$ и практически не зависит от N . Так, если $N=50$ и $n=3$, то $m^* \leq 3$, в то время как $m=1326$.

Множество линейных комбинаций векторов $X = \{x_i\}$ с неотрицательными компонентами представляет множество всех стратегий игрока I. Среди этих стратегий находятся и оптимальные. Для нахождения последних вычисляем, используя формулу (7.13), матрицу игры, решение которой дает набор оптимальных планов распределения наблюдателей по районам поиска.

Таким образом, алгоритм определения оптимальных планов упрощенным методом заключается в следующем.

1. Для каждого района вычислить число наблюдателей по формуле

$$x_j = \frac{N}{\ln(1 - w_j) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\ln(1 - w_j)}}.$$

2. Составить целочисленные планы распределения наблюдателей по районам поиска, т. е. каждому нецелочисленному $\bar{x}_j$ поставить в соответствие ближайшие к нему целые значения сверху и снизу. Общая формула целочисленного плана будет

$$X_L = (x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}), \quad L = 0, \dots, R = 2^r,$$

где r — число нецелочисленных значений.

3. Из полученных целочисленных планов отобрать $X^{(k)}$, которые удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^{(k)} = N$.

4. Принять планы $X^{(k)}$ в качестве чистых стратегий и, вычислив элементы матрицы $P \| p_{ij} \|$, где $p_{ij} = 1 - (1 - w_j)^{x_j^{(i)}}$, найти оптимальные планы.

Пример 7.6. Пусть $N=8$, $n=5$, $w_1=0,23$, $w_2=0,15$, $w_3=0,40$, $w_4=0,33$, $w_5=0,20$. Распределить наблюдателей по районам поиска.

Решение. Число возможных планов распределения $m=495$. Поэтому применим упрощенный метод.

1. Определяем число наблюдателей $\bar{x}_1=1,618$; $\bar{x}_2=2,602$, $\bar{x}_3=0,818$, $\bar{x}_4=1,056$ и $\bar{x}_5=1,859$.

2. Составляем $2^5=32$ комбинации, примыкающие к нецелочисленному плану, целочисленных планов

$$X_1 = (1, 2, 0, 1, 2),$$

$$X_2 = (2, 3, 1, 2, 2),$$

.

$$X_{32} = (2, 3, 1, 2, 2).$$

3. Выбираем те $X^{(k)}$, для которых $\sum_{j=1}^5 x_j^{(k)} = 8$. Таких планов будет $5 \times 2 = 10$, а именно:

$$X^{(1)} = (0, 3, 1, 2, 2),$$

$$X^{(6)} = (2, 3, 0, 2, 1),$$

$$X^{(2)} = (2, 3, 1, 0, 2),$$

$$X^{(7)} = (1, 3, 1, 1, 2),$$

$$X^{(3)} = (2, 3, 1, 2, 0),$$

$$X^{(8)} = (2, 3, 0, 2, 1),$$

$$X^{(4)} = (2, 1, 1, 2, 2),$$

$$X^{(9)} = (1, 2, 3, 1, 1),$$

$$X^{(5)} = (2, 3, 1, 1, 1),$$

$$X^{(10)} = (2, 2, 1, 1, 2).$$

4. Составляем матрицу игры и находим планы распределения (табл. 7.14), вероятность использования которых более нуля.

Таблица 7.14

Планы распределения наблюдателей по районам поиска

Номер плана	Номер района	1	2	3	4	5
	x_k	y_j				
		0,200	0,326	0,088	0,160	0,220
1	0,067	2	3	1	1	1
2	0,096	2	3	1	1	1
3	0,410	2	2	1	1	2
4	0,370	1	3	1	1	2
5	0,050	2	3	1	1	1

Однако даже упрощенный способ требует больших вычислений. Поэтому для отыскания оптимальных стратегий целесообразно полученную игру сводить к задаче линейного программирования и затем использовать стандартные программы машинного решения.

В заключение заметим, что аналогично строится теоретико-игровая модель распределения неоднородных наблюдателей. Обозначим: n — число районов поиска; N_l ($l=1, \dots, k$) — число поисковых единиц l -типа; $N = N_1 + \dots + N_k$ — число поисковых единиц k типов; w_{lj} — вероятность обнаружения объекта поисковой единицей l -го типа в j -м районе; $x_{lj}^{(i)}$ — число поисковых единиц l -го типа, направляемых в j -й район по i -му плану ($i=1, \dots, m$); m — число планов распределения поисковых единиц по районам поиска

$$m = \prod_{l=1}^k C_{N_l+n-1}^{N_l} = \prod_{l=1}^k \frac{(N_l+n-1)!}{N_l!(n-1)!}.$$

Тогда теоретико-игровой моделью распределения поисковых ресурсов будет матрица $P = \|p_{ij}\|$:

$$p_{ij} = 1 - \prod_{l=1}^k (1 - w_{lj})^{x_{lj}},$$

где p_{ij} — вероятность обнаружения объекта в j -м районе

при ограничениях $\sum_{j=1}^n x_{lj} = N_l$,

$$l = (1, \dots, k); x_{lj} = \{0, 1, \dots, N_l\}.$$

Нахождение оптимальной стратегии игрока I для матрицы P дает оптимальные планы распределения неоднородных наблюдателей. Методы решения в этом случае аналогичны рассмотренным выше.

Таблица 1

Таблица 1

Курсовые углы наблюдателя, (q_n) , при которых он сближается с объектом вплотную

[illegible]

Критические курсовые углы объекта (Q), при которых наблюдатель, обладающий меньшей скоростью, может сблизиться с ним вплотную

$m = \frac{V_H}{V_O}$	Q , град	$m = \frac{V_H}{V_O}$	Q , град
0,05	3	0,55	33,5
0,10	6	0,60	36,5
0,15	9	0,65	40,5
0,20	12	0,70	44,5
0,25	14,5	0,75	48,5
0,30	17,5	0,80	53
0,35	20,5	0,85	58
0,40	23,5	0,90	62
0,45	26,5	0,95	72
0,50	30	1,00	90

01-400

$\mu = D_{0B}/D_0$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
10	179	178	177	177	176	175	173	172	170	168	166	163	159	154	147	138	126	112	95
15	178	177	176	175	174	172	170	168	166	165	163	160	156	146	139	131	121	110	97
20	178	176	175	173	172	170	168	165	162	158	155	150	145	139	132	124	117	107	100
25	177	175	173	171	169	166	163	159	156	152	148	143	136	130	123	117	109	103	98
30	177	174	172	170	167	164	161	157	154	150	146	141	137	132	127	122	116	110	105
35	176	174	171	169	166	163	160	156	153	148	144	140	136	131	127	122	118	114	110
40	175	173	170	168	165	162	159	156	151	147	143	139	136	132	128	124	120	116	113
45	175	173	170	167	164	161	158	154	150	146	143	139	136	132	129	125	121	118	115
50	175	172	169	166	163	160	157	153	150	147	144	140	137	133	130	126	123	120	118
55	175	172	169	166	163	160	157	153	150	147	144	141	138	135	132	130	128	125	123
60	175	172	169	166	163	160	157	153	150	147	144	141	139	136	134	132	130	127	125
65	175	172	169	166	163	160	157	153	150	147	144	141	139	136	134	132	130	127	125
70	174	171	168	166	163	160	157	154	151	148	146	143	140	138	136	134	132	130	128
75	174	171	168	166	163	160	157	154	152	149	147	144	142	140	138	136	134	132	130
80	174	171	168	166	163	160	158	155	153	150	148	145	143	141	140	138	136	134	133
85	174	171	168	166	163	161	158	156	154	151	149	147	145	143	142	140	139	137	135
90	174	172	169	167	164	161	159	157	155	152	150	148	147	145	144	142	141	139	137
95	174	172	169	167	164	161	159	157	156	154	152	150	149	147	146	144	143	141	140
100	174	172	169	166	164	163	161	161	158	156	154	152	151	149	148	147	145	144	142
105	174	172	169	166	164	163	162	161	159	157	155	154	153	151	150	149	148	147	145
110	174	172	170	168	166	164	164	162	161	159	157	156	154	153	152	151	150	149	147
115	175	173	171	169	168	167	165	163	162	161	159	158	156	155	154	153	152	151	150
120	175	174	171	169	168	167	166	164	163	162	160	159	157	156	155	154	153	152	151
125	176	174	172	171	169	168	167	166	165	163	162	161	160	159	158	157	156	155	155
130	176	174	172	171	170	168	167	166	165	163	162	161	160	159	158	157	156	155	155
135	176	175	173	172	171	170	168	167	166	165	164	163	162	161	160	159	158	157	156
140	177	175	174	173	172	171	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161	160	159
145	177	175	174	173	172	171	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161	160	159
150	177	176	175	174	173	172	173	172	171	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162
155	177	176	175	174	173	172	173	172	171	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162
160	178	177	176	175	174	173	174	173	172	172	171	170	169	168	167	166	165	164	163
165	178	177	176	175	174	173	174	173	172	172	171	170	169	168	167	166	165	164	163
170	178	178	177	177	176	175	176	175	174	174	173	173	172	171	171	170	169	168	168
175	179	179	178	177	177	176	177	176	175	175	174	174	173	172	172	171	171	170	170
180	179	179	178	178	177	177	177	177	177	177	176	176	175	174	173	173	172	172	172
185	179	179	178	178	177	177	177	177	177	177	176	176	175	174	173	173	172	172	172
190	179	179	178	178	177	177	177	177	177	177	176	176	175	174	173	173	172	172	172
195	179	179	178	178	177	177	177	177	177	177	176	176	175	174	173	173	172	172	172
200	179	179	178	178	177	177	177	177	177	177	176	176	175	174	173	173	172	172	172

$\theta = \theta_{01} - \theta_{02}$	$\mu = D_{05}/D_0$																		
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
10	79°	66°	56°	49°	43°	39°	35°	32°	30°	28°	27°	26°	24°	24°	23°	22°	21°	21°	20°
15	85	75	68	61	55	53	49	46	43	40	39	37	36	34	33	32	31	30	29
20	92	85	79	73	68	64	61	58	55	52	50	48	46	45	43	42	41	40	38
25	96	90	85	80	75	72	69	66	63	60	58	56	54	53	51	50	49	47	46
30	100	95	91	86	83	80	77	74	71	69	67	65	63	62	60	58	57	55	54
35	103	99	95	91	88	85	82	80	78	77	75	73	72	70	69	67	66	62	61
40	106	103	99	96	93	90	88	86	84	82	80	78	76	75	73	72	71	69	68
45	109	106	102	100	97	95	93	91	89	87	85	83	82	81	79	78	77	75	74
50	112	109	106	104	102	100	98	96	94	92	90	89	88	87	85	84	83	82	80
55	115	112	110	107	106	104	102	100	99	98	96	94	93	92	90	89	88	86	85
60	118	115	113	111	109	108	106	104	102	101	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	121	118	116	115	113	112	110	108	107	106	104	102	101	100	99	98	97	96	95
70	123	121	119	118	117	115	114	112	111	110	109	107	106	105	104	103	102	101	100
75	126	124	122	121	120	119	117	116	115	114	112	111	110	109	108	107	106	105	104
80	129	127	126	124	123	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108
85	131	130	128	127	126	124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
90	134	133	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121	120	119	118	117	116	115
95	136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121	120	119	118
100	139	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
105	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125	124	123
110	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126
115	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129	128
120	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
125	151	151	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134
130	154	153	153	152	151	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137
135	157	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140
140	159	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145	144	143	142
145	162	161	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147	146	145
150	165	164	164	163	163	162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
155	168	167	166	166	165	165	164	163	162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152
160	170	169	169	168	168	167	166	165	164	163	162	161	160	159	158	157	156	155	154
165	172	172	172	172	171	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161	160	159	158
170	175	175	175	175	174	174	174	173	172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162
175	178	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177	177

Относительное перемещение (S_p) и относительная скорость (V_p), соответствующие единице измерения пути или скорости

$$t = t_0 - t_{00}$$

$$t = k_H - k_0$$

$$\mu = D_{05}/D_0 \quad \text{или} \quad m = V/V_0$$

	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
10	0,71	0,61	0,51	0,42	0,33	0,25	0,19	0,17	0,21	0,28	0,36	0,45	0,54	0,64	0,74	0,83	0,93	1,03
20	0,73	0,64	0,56	0,48	0,42	0,37	0,34	0,35	0,38	0,43	0,50	0,57	0,66	0,74	0,83	0,93	1,02	1,11
30	0,76	0,68	0,62	0,57	0,53	0,50	0,51	0,52	0,55	0,60	0,66	0,73	0,81	0,88	0,97	1,06	1,15	1,24
40	0,79	0,74	0,70	0,66	0,65	0,64	0,66	0,68	0,72	0,78	0,84	0,90	0,97	1,05	1,14	1,22	1,30	1,39
50	0,84	0,80	0,78	0,77	0,77	0,78	0,81	0,84	0,89	0,95	1,01	1,08	1,15	1,22	1,31	1,39	1,47	1,56
60	0,89	0,87	0,87	0,87	0,89	0,90	0,95	1,00	1,05	1,11	1,18	1,25	1,32	1,40	1,48	1,56	1,64	1,73
70	0,94	0,94	0,95	0,96	1,01	1,05	1,09	1,15	1,21	1,27	1,34	1,41	1,49	1,57	1,65	1,73	1,82	1,91
80	0,99	1,01	1,04	1,06	1,12	1,17	1,22	1,25	1,35	1,42	1,49	1,57	1,65	1,73	1,81	1,90	1,99	2,07
90	1,04	1,08	1,12	1,17	1,22	1,28	1,35	1,41	1,49	1,56	1,64	1,72	1,80	1,89	1,97	2,06	2,15	2,24
100	1,09	1,14	1,19	1,25	1,32	1,39	1,46	1,54	1,61	1,69	1,78	1,86	1,94	2,03	2,12	2,21	2,30	2,39
110	1,14	1,20	1,26	1,33	1,40	1,48	1,56	1,64	1,72	1,81	1,89	1,98	2,06	2,16	2,25	2,34	2,43	2,52
120	1,18	1,25	1,32	1,40	1,47	1,56	1,65	1,73	1,82	1,91	2,00	2,09	2,18	2,27	2,36	2,46	2,55	2,65
130	1,21	1,29	1,38	1,46	1,54	1,63	1,72	1,81	1,90	2,00	2,09	2,18	2,28	2,37	2,47	2,56	2,66	2,75
140	1,24	1,33	1,42	1,51	1,61	1,69	1,78	1,88	1,97	2,07	2,16	2,26	2,36	2,45	2,55	2,65	2,74	2,84
150	1,27	1,36	1,45	1,55	1,64	1,74	1,84	1,93	2,03	2,13	2,22	2,32	2,42	2,52	2,61	2,71	2,81	2,91
160	1,29	1,38	1,48	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97	2,07	2,17	2,27	2,37	2,46	2,56	2,66	2,76	2,86	2,96
170	1,30	1,39	1,49	1,59	1,69	1,79	1,89	1,99	2,09	2,19	2,29	2,39	2,49	2,59	2,69	2,79	2,89	2,99
180	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00

Значение величины $K_p = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, для вычисления
средней относительной скорости

$\frac{V_M}{V_K}$	K_p	$\frac{V_M}{V_K}$	K_p
0,0	1,00	1,5	0,67
0,2	0,84	2,0	0,71
0,4	0,74	2,5	0,74
0,6	0,68	3,0	0,77
0,8	0,65	4,0	0,82
1,0	0,64	5,0	0,84

317

Таблица 5

Значение вспомогательного угла, град.

$\varphi_{об}$	$\frac{m}{\mu} = \frac{V_{нД_0}}{V_{обД_0B}}$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
10	9	8	7	7	7	6	6	6	5	5	4	3	3
20	18	17	16	14	13	12	12	11	11	10	8	7	5
30	27	25	23	21	20	18	18	17	16	15	12	10	7
40	37	34	31	29	27	26	24	22	21	20	16	13	10
50	46	42	39	36	34	30	30	28	27	25	19	16	12
60	55	51	47	44	41	38	36	34	32	30	23	19	14
70	65	60	56	52	48	45	42	40	37	35	27	22	15
80	75	75	64	60	56	52	49	45	43	40	31	24	17
90	84	79	73	68	64	59	55	51	48	45	34	27	18
100		88	83	77	72	67	62	58	54	50	37	28	19
110				86	80	75	69	64	59	55	39	30	20
120						83	77	71	65	60	41	30	20
130	СБЛИЖЕНИЕ НА D_{OB}						86	79	71	65	42	29	18
140								87	78	70	41	35	21
150	НЕВОЗМОЖНО								88	77	39	24	14
160										80	32	18	9
170											85	19	5

Плотности вероятности движения обнаруженного объекта данным курсом

		ξ, град																		
		0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
$m = 0,02$																				
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,25	0,38	0,47	0,50	0,47	0,38	0,25	0,09	0,00	0,00	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,25	0,38	0,47	0,50	0,43	0,32	0,17	0,01	0,00	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,25	0,38	0,47	0,50	0,47	0,38	0,25	0,09	0,00
100	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,25	0,38	0,47	0,50	0,47	0,38	0,25	0,09
120	0,25	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,25	0,38	0,47	0,50	0,47	0,38	0,25
140	0,39	0,25	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,25	0,39	0,48	0,51	0,48	0,39
160	0,48	0,39	0,25	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,25	0,39	0,48	0,51	0,48
180	0,51	0,48	0,39	0,25	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,25	0,39	0,48	0,51
$m = 0,1$																				
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,45	0,37	0,45	0,37	0,26	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,45	0,47	0,45	0,37	0,26	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,26	0,37	0,45	0,48	0,45	0,37	0,26	0,11	0,00	0,00	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10	0,00	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,25	0,38	0,47	0,49	0,47	0,38	0,25	0,09	0,00
100	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,25	0,38	0,47	0,51	0,47	0,38	0,25	0,08
120	0,24	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,24	0,39	0,48	0,51	0,48	0,39	0,24
140	0,39	0,24	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,24	0,39	0,49	0,52	0,49	0,39
160	0,45	0,32	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,24	0,39	0,49	0,53	0,49
180	0,53	0,50	0,39	0,24	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,24	0,39	0,50	0,53

t, град

φ_H	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,14	0,26	0,36	0,43	0,45	0,43	0,36	0,26	0,14	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,14	0,26	0,36	0,43	0,45	0,43	0,36	0,26	0,14	0,01	0,00	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,26	0,37	0,44	0,46	0,44	0,37	0,26	0,13	0,00	0,00	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,44	0,47	0,45	0,37	0,26	0,12	0,00	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,01	0,00
100	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,25	0,39	0,48	0,51	0,48	0,39	0,25	0,07
120	0,24	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,24	0,40	0,50	0,53	0,49	0,39	0,24
140	0,40	0,22	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,22	0,40	0,51	0,55	0,51	0,40
160	0,52	0,40	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,40	0,52	0,56	0,52
180	0,57	0,53	0,40	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,40	0,52	0,57

0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,14	0,26	0,36	0,42	0,44	0,42	0,36	0,26	0,14	0,02	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,14	0,26	0,36	0,43	0,45	0,43	0,36	0,26	0,14	0,01	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,26	0,37	0,43	0,46	0,43	0,37	0,26	0,13	0,00	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,44	0,47	0,44	0,37	0,26	0,12	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10
100	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,25	0,39	0,46	0,48	0,51	0,48	0,39	0,25
120	0,23	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,23	0,39	0,50	0,53	0,50	0,39	0,23
140	0,40	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,40	0,52	0,56	0,52	0,40
160	0,53	0,40	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,40	0,53	0,57	0,53
180	0,58	0,53	0,40	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,40	0,53	0,58

 $m = 0,22$

q_H	$\xi, \text{ град}$																		
	0	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	
	$m = 0,25$																		
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,15	0,26	0,36	0,42	0,44	0,42	0,35	0,26	0,15	0,03	0,00	0,00	0,00	
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,15	0,26	0,36	0,42	0,44	0,42	0,36	0,26	0,15	0,02	0,00	0,00	
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,14	0,26	0,36	0,43	0,45	0,43	0,36	0,26	0,14	0,01	0,00	
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,44	0,47	0,44	0,37	0,26	0,12	0,00	
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10	
100	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,24	0,39	0,48	0,51	0,48	0,39	0,24	0,07	
120	0,23	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,23	0,40	0,50	0,54	0,50	0,40	0,23	
140	0,40	0,31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,40	0,52	0,56	0,52	0,40	
160	0,53	0,48	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,40	0,53	0,58	0,53	
180	0,59	0,58	0,40	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,40	0,54	0,59	
	$m = 0,29$																		
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,15	0,26	0,36	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,15	0,04	0,00	0,00	0,00	
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,15	0,26	0,35	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,15	0,03	0,00	0,00	
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,14	0,26	0,36	0,42	0,45	0,43	0,36	0,26	0,14	0,02	0,00	
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,26	0,37	0,44	0,46	0,44	0,37	0,26	0,13	0,00	
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,25	0,38	0,46	0,46	0,49	0,46	0,38	0,25	0,10	
100	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,24	0,39	0,48	0,51	0,48	0,39	0,24	0,07	
120	0,23	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,23	0,40	0,51	0,55	0,51	0,40	0,23	
140	0,40	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,40	0,53	0,57	0,53	0,40	
160	0,55	0,40	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,40	0,55	0,60	0,55	
180	0,60	0,55	0,41	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,18	0,41	0,55	0,60	

q_H	ξ , град																		
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
$m = 0,33$																			
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,16	0,26	0,35	0,40	0,42	0,40	0,35	0,26	0,16	0,05	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,16	0,26	0,35	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,16	0,05	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,15	0,26	0,36	0,42	0,42	0,44	0,42	0,35	0,26	0,15	0,03	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,26	0,37	0,43	0,43	0,46	0,43	0,37	0,26	0,13	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,26	0,38	0,46	0,46	0,48	0,46	0,38	0,26	0,11
100	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,24	0,39	0,48	0,52	0,48	0,39	0,24	0,06
120	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,40	0,51	0,55	0,51	0,40
140	0,40	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,40	0,54	0,59	0,54
160	0,56	0,41	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,41	0,56	0,62
180	0,63	0,57	0,41	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,16	0,41	0,57	0,63
$m = 0,4$																			
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,17	0,26	0,34	0,39	0,41	0,39	0,34	0,26	0,17	0,07	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,16	0,26	0,34	0,39	0,41	0,39	0,34	0,26	0,16	0,06	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,16	0,26	0,35	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,16	0,04	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,14	0,26	0,36	0,43	0,45	0,43	0,35	0,26	0,14	0,01
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,26	0,38	0,45	0,48	0,45	0,38	0,26	0,11
100	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,24	0,39	0,49	0,52	0,49	0,39	0,24
120	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,40	0,52	0,57	0,52	0,40
140	0,41	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,41	0,56	0,61	0,56
160	0,59	0,41	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,41	0,59	0,65
180	0,66	0,60	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,40	0,60	0,66

q_n	ξ , град																	
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
$m = 0,5$																		
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,18	0,26	0,33	0,38	0,39	0,38	0,33	0,26	0,18	0,09	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,17	0,26	0,33	0,38	0,40	0,38	0,33	0,26	0,17	0,08	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,17	0,26	0,34	0,39	0,41	0,39	0,34	0,26	0,17	0,06	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,13	0,25	0,34	0,40	0,42	0,40	0,40	0,25	0,13	0,03
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,25	0,37	0,45	0,48	0,45	0,37	0,26	0,11
100	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,24	0,39	0,49	0,53	0,49	0,39	0,24
120	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,40	0,54	0,59	0,54	0,40
140	0,40	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,40	0,59	0,65	0,59
160	0,63	0,40	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,40	0,63	0,71
180	0,73	0,64	0,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,39	0,64	0,73
$m = 0,55$																		
0	0,00	0,00	0,00	0,01	0,09	0,18	0,26	0,33	0,37	0,38	0,37	0,33	0,26	0,18	0,09	0,01	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,09	0,18	0,26	0,33	0,37	0,39	0,37	0,33	0,26	0,18	0,09	0,01	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,17	0,26	0,34	0,39	0,40	0,39	0,34	0,26	0,17	0,07	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,15	0,26	0,35	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,15	0,04
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,45	0,47	0,45	0,37	0,26	0,12
100	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,24	0,39	0,49	0,53	0,49	0,39	0,24
120	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,18	0,41	0,55	0,60	0,55	0,41
140	0,40	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,40	0,61	0,68	0,61
160	0,65	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,38	0,65	0,75
180	0,78	0,67	0,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,37	0,67

q_H	$t, \text{ град}$																			
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	
$m = 0,62$																				
0	0,00	0,00	0,00	0,03	0,10	0,18	0,26	0,32	0,36	0,37	0,36	0,32	0,26	0,18	0,10	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,10	0,18	0,26	0,32	0,36	0,38	0,36	0,32	0,26	0,18	0,10	0,02	0,00	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,17	0,26	0,33	0,38	0,40	0,38	0,33	0,26	0,17	0,08	0,00	0,00	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,16	0,26	0,35	0,41	0,43	0,41	0,35	0,26	0,16	0,05	0,00	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,45	0,47	0,45	0,37	0,26	0,12	0,00	0,00
100	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,23	0,39	0,50	0,53	0,50	0,39	0,23	0,04	0,00
120	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,41	0,56	0,62	0,56	0,41	0,17	0,00
140	0,39	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,39	0,63	0,71	0,63	0,04	0,00
160	0,39	0,35	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,35	0,69	0,81	0,69	0,00
180	0,85	0,71	0,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,32	0,71	0,85	0,00
$m = 0,71$																				
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,11	0,19	0,25	0,31	0,35	0,36	0,35	0,31	0,25	0,19	0,11	0,04	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,11	0,18	0,26	0,31	0,35	0,37	0,35	0,31	0,26	0,18	0,11	0,04	0,00	0,00
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,09	0,18	0,26	0,33	0,37	0,38	0,37	0,33	0,26	0,18	0,09	0,01	0,00
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,16	0,26	0,34	0,40	0,42	0,40	0,35	0,26	0,16	0,06	0,00
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,26	0,37	0,44	0,47	0,44	0,37	0,26	0,12	0,00
100	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,23	0,40	0,50	0,54	0,50	0,40	0,23	0,03	0,00
120	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	0,41	0,58	0,64	0,58	0,41	0,14	0,00
140	0,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,37	0,67	0,77	0,67	0,37	0,00
160	0,74	0,26	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,26	0,74	0,91	0,74	0,00
180	0,98	0,77	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,18	0,77	0,98	0,00

[illegible]

ξ, град

q_n	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	
$m = 1,25$																				
0	0,03	0,04	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	0,26	0,28	0,29	0,28	0,26	0,22	0,18	0,14	0,10	0,06	0,04	0,03	
20	0,03	0,04	0,03	0,06	0,09	0,14	0,18	0,23	0,26	0,29	0,29	0,29	0,26	0,23	0,18	0,14	0,09	0,06	0,03	
40	0,17	0,02	0,00	0,02	0,17	0,40	0,68	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,69	0,40	0,17	
60	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,17	0,30	0,42	0,52	0,58	0,61	0,58	0,52	0,42	0,30	0,17	0,05	
80	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,15	0,28	0,39	0,46	0,48	0,46	0,39	0,28	0,15	0,02	
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,24	0,47	0,64	0,67	0,61	0,47	0,24	0,00	
120	0,10	0,36	0,64	0,90	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,90	0,64	0,36	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	
140	0,04	0,09	0,16	0,23	0,30	0,35	0,39	0,40	0,39	0,35	0,30	0,23	0,16	0,09	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	
$m = 1,7$																				
0	0,06	0,07	0,09	0,11	0,14	0,18	0,21	0,23	0,25	0,25	0,25	0,23	0,21	0,18	0,14	0,11	0,09	0,07	0,06	
20	0,06	0,06	0,06	0,08	0,11	0,14	0,18	0,21	0,24	0,25	0,26	0,25	0,24	0,21	0,18	0,14	0,11	0,08	0,06	
40	0,06	0,04	0,03	0,04	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	0,25	0,28	0,28	0,28	0,25	0,22	0,18	0,14	0,10	0,06	
60	0,01	0,03	0,00	0,00	0,00	0,03	0,16	0,32	0,48	0,64	0,77	0,85	0,88	0,85	0,77	0,64	0,48	0,32	0,16	
80	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,17	0,30	0,40	0,46	0,49	0,46	0,40	0,30	0,17	0,04	
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,57	0,78	0,85	0,78	0,57	0,25	0,00	
120	0,11	0,21	0,32	0,42	0,51	0,56	0,58	0,56	0,51	0,42	0,32	0,21	0,11	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02	0,11	

Расчет величины $1 - e^{-c}$

c	$1 - e^{-c}$	c	$1 - e^{-c}$	c	$1 - e^{-c}$	c	$1 - e^{-c}$
0,00	0,00	0,23	0,2055	0,46	0,3687	0,69	0,4984
0,01	0,0100	0,24	0,2134	0,47	0,3750	0,70	0,5034
0,02	0,0198	0,25	0,2212	0,48	0,3812	0,71	0,5084
0,03	0,0296	0,26	0,2289	0,49	0,3874	0,72	0,5132
0,04	0,0392	0,27	0,2366	0,50	0,3935	0,73	0,5181
0,05	0,0488	0,28	0,2442	0,51	0,3995	0,74	0,5229
0,06	0,0582	0,29	0,2517	0,52	0,4055	0,75	0,5276
0,07	0,0676	0,30	0,2592	0,53	0,4114	0,76	0,5329
0,08	0,0769	0,31	0,2666	0,54	0,4173	0,77	0,5370
0,09	0,0861	0,32	0,2739	0,55	0,4231	0,78	0,5416
0,10	0,0952	0,33	0,2811	0,56	0,4288	0,79	0,5462
0,11	0,1042	0,34	0,2882	0,57	0,4345	0,80	0,5507
0,12	0,1131	0,35	0,2953	0,58	0,4401	0,85	0,5726
0,13	0,1219	0,36	0,3023	0,59	0,4457	0,90	0,5934
0,14	0,1306	0,37	0,3092	0,60	0,4512	0,95	0,6133
0,15	0,1393	0,38	0,3161	0,61	0,4566	1,00	0,6321
0,16	0,1479	0,39	0,3229	0,62	0,4621	1,2	0,6988
0,17	0,1563	0,40	0,3297	0,63	0,4674	1,4	0,7534
0,18	0,1647	0,41	0,3362	0,64	0,4727	1,6	0,7981
0,19	0,1730	0,42	0,3430	0,65	0,4780	1,8	0,8347
0,20	0,1813	0,43	0,3495	0,66	0,4831	2,0	0,8647
0,21	0,1894	0,44	0,3560	0,67	0,4883	3,0	0,9502
0,22	0,1975	0,45	0,3624	0,68	0,4934	5,0	0,9933

q_n	ξ , град																		
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
$m = 2,5$																			
0	0,10	0,99	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,22	0,22	0,22	0,21	0,19	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,10
20	0,10	0,91	0,95	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,22	0,23	0,22	0,21	0,19	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10
40	0,10	0,08	0,08	0,08	0,10	0,12	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24	0,24	0,24	0,22	0,20	0,17	0,14	0,12	0,10
60	0,10	0,06	0,04	0,03	0,04	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	0,26	0,28	0,29	0,28	0,26	0,22	0,18	0,14	0,10
80	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,22	0,34	0,43	0,49	0,52	0,49	0,43	0,34	0,22	0,09
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,00
120	0,15	0,25	0,35	0,44	0,51	0,54	0,54	0,51	0,44	0,35	0,25	0,15	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,15
$m = 5$																			
0	0,13	0,13	0,14	0,14	0,15	0,17	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18	0,17	0,15	0,14	0,14	0,13	0,13
20	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,15	0,17	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	0,13
40	0,13	0,12	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15	0,17	0,18	0,19	0,20	0,20	0,19	0,19	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13
60	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,22	0,22	0,22	0,21	0,19	0,17	0,15	0,13
80	0,37	0,19	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,32	0,43	0,49	0,49	0,86	0,72	0,55	0,37

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., «Наука», 1967.
2. Введение в теорию выработки решений. М., Воениздат, 1972. Авт.: В. А. Абчук, Л. А. Емельянов, Ф. А. Матвейчук, В. Г. Суздаль.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Сов. радио», 1972.
5. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1964.
6. Гурин Л. С., Дымарский Я. С., Меркулов А. Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М., «Сов. радио», 1968.
7. Дубровин К. О., Сиротин П. А. Время пребывания цели в районе поиска. «Морской сборник», 1965, № 6.
8. Дьячков С. Г., Тененбаум Д. Я., Шмелев И. Ф. Оперативное управление группой промысловых судов на промысле методами стратегических игр. «Рыбное хозяйство», 1968, № 8.
9. Теория поиска в военном деле. М., Воениздат, 1964. Авт.: Емельянов Л. А., Абчук В. А., Лапшин В. П., Суздаль В. Г.
10. Запольский М. Б. «Расчеты маневрирования при поиске цели. «Морской сборник», 1969, № 6.
11. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. I. М., «Сов. радио», 1974.
12. Мищенко Ю. А. Радиолокационные цели. М., Воениздат, 1966.
13. Морз Ф. М., Кимбел Д. Е. Методы исследования операций. М., «Сов. радио», 1956.
14. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М., «Наука», 1971.
15. Основы маневрирования кораблей. М., Воениздат, 1966. Авт.: М. И. Скворцов, И. В. Юхов, Б. И. Землянов, В. А. Абчук, О. А. Мрыкин.
16. Радиолокационные устройства. Под ред. Григорина-Рябова В. А. М., «Сов. радио», 1970.
17. Саати Т. Математические методы исследования операций. М., Воениздат, 1963.

18. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., «Мир», 1973.
19. Сиротин П. А. Количественная оценка поиска. «Морской сборник», 1969, № 8.
20. Справочник по вероятностным расчетам. М., Воениздат, 1970. Авт.: Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Корovina И. А.
21. Тюрин А. М., Сташкевич А. П., Таранов Э. С. Основы гидроакустики. Л., Судостроение, 1966.
22. Уоррен Хортон Дж. Основы гидроакустики. Л., Судпромгиз, 1961.
23. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., «Мир», 1967.
24. Физические основы подводной акустики (перевод с англ. под ред. Мясищева В. И.). М., «Сов. радио», 1955.
25. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1969.
26. Operations Research, 1956—1957 (Статьи Б. Купмэна по теории поиска).
27. Петросян Л. А. Игры преследования с «линией» преследования. «Вестник ЛГУ», Л., 1967, № 13.
28. Дуткевич Ю. Г., Петросян Л. А. Игры с линией «жизни». Случай I-захвата. «Вестник ЛГУ», Л., 1969, № 13, вып. 3.
29. Динер И. Я. Исследование операций. Л., ВМОЛУА, 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность 36

— потенциалов 191

Активные стратегии 66

Алгоритм венгерского метода 288

— определения оптимальных планов
упрощенным методом 309

Аномалия 97

Атмосферная рефракция 69

Атмосферный волновод 91

Бесконечная антагонистическая игра 307

Венгерский метод линейного программирования 284, 291

Вероятность движения обнаруженного объекта поиска данным курсом 179

— неуклонения объекта поиска от наблюдателя 176, 179

Вероятность обнаружения 16, 193

— — при непрерывном и дискретном обследовании пространства 28

— —, учет подвижности объекта 197

Вероятность получения ровно заданного числа обнаружений за время поиска 15

— появления неподвижного объекта в заданных секторах наблюдения 164

— объектов поиска в диапазоне курсовых углов наблюдателя, симметричных относительно направления его движения 168

— объектов поиска в заданном диапазоне курсовых углов наблюдателя 164, 167

— объектов поиска в зависимости от направления и расстояния 168

— подвижных объектов с различных направлений 164

— получения контакта 194

Вогнутые функции 293

Выигрыш игрока 64

Выпуклые функции 293

Гиббса лемма 45

Градиент скорости звука 93

График плотности вероятности появления объекта в зависимости от курсового угла 153

— расчета дальности действия радиолокатора с учетом затухания радиоволн 107

Дальность действия гидролокатора на носовых курсовых углах подводного объекта 64

— — геометрическая 112

— — гидроакустической станции 107

— — РЛС 104

— — энергетическая 109

Дальность обнаружения 22, 104

Дерево игры 69

Детерминированные модели 127

Динамическое программирование 48

— —, вычислительная процедура 51

Дискретный поиск 253

— — нескрытый 257

— — скрытый 255

Дифференциальные игры 62

Дифференциальный закон распределения вероятных мест объекта поиска после первичного обнаружения 22

Зависимость интенсивности поиска, потенциала обнаружения и вероятности обнаружения от времени поиска 195

— — эхо-сигнала от цилиндрического объекта 81

— — от реального объекта 81

— окружности встреч от изменений скоростей наблюдателя и объекта поиска 131

— силы объекта поиска от величины эквивалентного радиуса 82

— — от длительности послышки гидролокатора и курсового угла объекта 85

— — от курсового угла 83

— — от угла места радиолокатора и курсового угла цели 84

Задачи поиска 20, 27, 28, 72, 197

— —, вторичное обнаружение объекта (после первого обнаружения) 20

— — летательного аппарата за определенное время 45

— — объекта, уклоняющегося от обнаружения 68

— —, определение числа поисковых партий с минимальным суммарным временем геологической разведки 40

— —, сближение на дальность действия средств обнаружения 136—139

— —, сближение на минимальную дальность обнаружения 142

— — сближение вплотную 135

— — распределения поисковых единиц с наибольшей эффективностью поиска 52

Заключительная ситуация 56
Затухание радиоволн 86
Зона достоверного обнаружения 24
— обнаружения 152
Игра антагонистическая 57
— 2×2 65
— с матрицей A

Игры, геометрическая интерпретация 66

— конечные и бесконечные 57
— матричные 57
— многоходовые (позиционные) 57
— многошаговые 91
— одноходовые 57

Изометрический слой 96

Интегральный закон распределения дальностей обнаружения 24

Интенсивность акустического поля подводного объекта с учетом затухания звука 93

— поиска для нестационарного пуассоновского потока 14

— для стационарного пуассоновского потока 14

Интенсивность потока обнаружений (плотность потока событий) 14, 27

— полезного гидроакустического сигнала 98

— эхо-сигнала 108

— эхо-сигнала с учетом затухания звука в море 93

Информационное множество 60

Кинематика поиска 7, 17, 74, 112

Контакт с объектом при слежении 275

Конфликтные поисковые ситуации 55

Коэффициент концентрации 80

— отражения от дна 98

— распознавания 108

Кривизна земной поверхности 88

Критерии эффективности поиска 183, 244

— поиска вероятностные 190

Критический курсовой угол 133

— —, таблица 313

Курсовой угол 133, 183

— наблюдателя, при котором он сближается с объектом вплотную (таблица) 134, 312

Линейные экстремальные модели распределения поисковых ресурсов 281

Логарифмическая спираль 249

Маневрирование наблюдателя 267, 268

Марковский процесс 12

Математические модели нормативные 9, 31

— — описательные 9, 12

— для распределения ресурсов 276, 278

— слежения за одиночным объектом 257

— — за группой объектов 260

— — экстремальные 14, 31

Математическое ожидание времени обнаружения 193

Матричные игры 57

Минимальная дальность обнаружения 24

Модели без ограничений 231

— с ограничениями 231

— распределения поисковых ресурсов 304

Модель детерминированного распределения поисковых ресурсов 279

Недостоверная информация о пребывании объекта 201

Нелинейные экстремальные модели распределения поисковых ресурсов 292

Нестационарность потока обнаружения 16

Нижнее (верхнее) значение игры 63

Номограмма для расчета поиска на площади 229

Обнаружение объекта 6

— объектов радиолокационными средствами 86

— — на данной дальности при помощи ранее полученных результатов 123

— — при поиске на линии 215

Объекты поиска 8

— —, вероятность их нахождения в пределах круга 213

— —, вероятность их появления в пределах дальности действия средств обнаружения 152

— —, вероятность получения контакта 198

— —, время обнаружения 207

— —, гидролокационные 79

— —, изменение вероятности обнаружения 192

— —, классификация и общая характеристика 74

— —, математическое ожидание числа обнаружений 205

— —, неравномерное распределение объектов 210

— —, нормальное распределение вероятностей 19

— —, радиолокационные 76

— —, распределение районов поиска между наблюдателями 208

— —, сближение вплотную 133

— —, отклонение на обнаружения 175

— —, отклонение от сближения с наблюдателем 208

Опережение наблюдателя объектом поиска 201

Опорный план (базис) 39

Оптимальное поведение 49

— распределение поисковых ресурсов 276

Оптимальные стратегии в матричных играх 65

Оптимальный план распределения поисковых ресурсов 306

Относительное перемещение и относительная скорость, соответствующая единице пути или скорости 316

Ослабление и затухание звука в море 91

Отражение радиоволн от земной поверхности 87

План Φ_n (n — шаговый план) 34

Плотности вероятности движения обнаруженного объекта данным курсом 318—326

Поведение 49

Подводный звуковой канал 96

Поиск в вероятном секторе объекта поиска 242

— с возрастающей интенсивностью (интенсивный) 196

— по вызову 210, 242

— группой наблюдателей 224, 234

— на линии 231

— при равномерном распределении объектов по районам 290

Поиск объектов 3, 8

— вторичный («по вызову») 19

— достоверный

— закономерный 8

— математические модели 8

— когда наблюдатель и объект поиска движутся по сложным траекториям 116, 119

— недостоверный 8

— непрерывный 8

— как случайный процесс марковского типа 12

— случайный 8

— теория 6

— на параллельных курсах 261

— на площади 220

— в районе обнаружения объекта 248

Поисковые ситуации 218

Поисковый потенциал (потенциал обнаружения) 15

Поиск подводными лодками торговых судов 187

— с постоянной интенсивностью 193

— при равномерном распределении объектов 282

— самолетами подводных лодок 188

Полярная диаграмма плотности вероятности появления объектов поиска с различных направлений 167

Поток обнаружений 13

— отсутствие последствия 13

Поток событий 13

— обладающий свойством ординарности 13

— пуассоновский (простейший) 13, 14

Предельная вероятность слежения 261

Пример нахождения математического ожидания числа обнаруженных объектов в единицу времени 157

Принцип минимакса 64

— оптимального динамического программирования 49

— в теоретико-игровых моделях поиска 62

Производительные критерии поиска 185

Процесс марковского типа 12

Радиоволна распространение 86

Разрешающая способность средства обнаружения 103

Распределение наблюдателей по районам при поиске неоднотипных объектов 296, 300

Распределенные объекты 78

Распространение звуковых волн вертикальное 96

Расчет встречи линии наблюдателя с объектом поиска 131

Реверберация 99

Рекуррентные (возвратные) последовательности 34

Рекуррентный процесс 34

Рефракция звуковых волн в море 98, 98

Решение игры 64

Сверхрефракция 90

Седловая точка матрицы 83

Сетка изохрон 150

Сила цели 82—86

Симплексный метод 38, 68

Ситуации равновесия 62

Слежение 7

— за обнаруженными объектами 257, 267

Слой скачка 96

Случайное распределение поисковых ресурсов 279

Средства обнаружения 100

Стационарность потока обнаружений 13, 16

Стохастические модели 152

Стратегия оптимальная 64

— смешанная 64

Таблица значений вспомогательных углов 314, 317

— K_v для вычисления средней относительной скорости 317

— расчета величины β —с 327

— плотности вероятности появления объектов поиска с различных направлений относительно наблюдателя в зависимости от отношения их скоростей 163

Точечные объекты 78

Точка глобального максимума 32

Трансверзная дальность 116

Эксплуатационная надежность средства обнаружения 103

Экстремальная модель выпуклого программирования 44

— динамического программирования 48

— линейного программирования 36

— поиска объектов 31

Энергетическая дальность гидролокатора 140

Эффективная отражающая площадь объекта 76, 78

— ширина полосы обследования 121

Эффективность поиска 183, 201, 206

Эшелонирование наблюдателей по глубине при организации поиска на рубеже 240

Фактор аномалии 98

Функция вогнутая 44

— выигрыша 56

Чистая стратегия игрока 60

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие основы теории поиска объектов	6
1.1. Предмет теории поиска объектов	6
1.2. Закономерности и математические модели поиска объектов	8
1.3. Описательные модели поиска объектов	12
1.4. Нормативные экстремальные модели поиска объектов	31
1.5. Нормативные теоретико-игровые модели поиска объектов	55
Глава 2. Физические основы поиска объектов	74
2.1. Объекты поиска. Классификация и общая характеристика	74
2.2. Среда и условия поиска	86
2.3. Средства обнаружения объектов поиска и их характеристика	100
Глава 3. Кинематика поиска	112
3.1. Взаимное перемещение наблюдателя и объекта поиска	112
3.2. Возможности появления объектов поиска в пределах дальности действия средств обнаружения (детерминированные модели)	127
3.3. Вероятность появления объектов поиска в пределах дальности действия средств обнаружения (стохастические модели)	152
3.4. Вероятность движения обнаруженного объекта поиска данным курсом	179
Глава 4. Эффективность поиска	183
4.1. Критерии эффективности поиска	183
4.2. Расчеты вероятности обнаружения и математического ожидания времени обнаружения	193
4.3. Учет факторов, ограничивающих эффективность поиска	201
4.4. Математическое ожидание числа обнаруженных объектов при поиске. Расчеты, обеспечивающие заданную эффективность поиска. Распределение района поиска между наблюдателями	205
4.5. Особенности расчета вероятности обнаружения при неравномерном распределении вероятных мест объекта поиска	210

Глава 5. Поисковые ситуации и способы поиска объектов	218
5.1. Определения и общие положения	218
5.2. Способы поиска на площади (в заданном районе)	220
5.3. Способы поиска на линии (на рубеже)	231
5.4. Способы поиска по данным первичного обнаружения (вторичный поиск или поиск «по вызову»)	242
5.5. Дискретный поиск	253
Глава 6. Слежение за обнаруженными объектами	257
6.1. Математические модели процесса слежения	257
6.2. Способы слежения за обнаруженным объектом	267
Глава 7. Оптимальное распределение поисковых ресурсов	276
7.1. Общие принципы построения математических моделей распределения поисковых ресурсов	276
7.2. Линейные экстремальные модели распределения по- исковых ресурсов	282
7.3. Нелинейные экстремальные модели распределения поисковых ресурсов	292
7.4. Теоретико-игровые модели распределения поисковых ресурсов	304
Приложение	312
Список литературы	328
Предметный указатель	330

ИБ № 78

ВЛАДИМИР АВРААМОВИЧ АВЧУК
ВИТАЛИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ СУЗДАЛЬ

ПОИСК ОБЪЕКТОВ

Редактор *Н. Я. Гутчина*
Обложка художника *О. В. Камаева*
Технический редактор *А. А. Белоус*
Корректор *Л. А. Максимова*

Сдано в набор 1/X-76 г. Подписано в печать 3/II-77 г. Т-03114
Формат 84×108/₃₂ Бумага машиномелованная
Объем 17,64 усл. п. л. 17,620 уч.-изд. л. Тираж 14 400 экз.
Зак. 819 Цена 1 р. 11 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, М-14, Шлюзовая наб., 10,